PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. 1. Mai 1920. Redaktionsschluß für No. 11 am 10. Mai 1920. 21. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. v. Mises, Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. I. S. 225.

W. Schottky, Gleichgewichtssätze für die elektromagnetisch aufgebaute Materie. S. 232.

O. Nürnberger, Erfahrungen bei der Bestimmung der Radioaktivität von Quellwässern. S. 241.

W. Kramer, Über die Bildverzerrung bei der Abbildung eingetauchter Körper. S. 246.

Besprechungen:

V. Kohlschütter, Nebel, Rauch und Staub. S. 248.

R. Hennig, Unser Wetter. S. 248.

Tagesereignisse. S. 248.

Personalien. S. 248.

Gesuche. S. 248.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. I.

Allgemeine Betrachtungen.

Von R. v. Mises.

Den Kernpunkt aller begrifflichen Schwierigkeiten in der physikalischen Statistik bildet bisher der in jedem Problem an irgendeiner Stelle notwendig zu vollziehende Übergang von räumlichen (oder auch sogenannten virtuellen) Gesamtheiten zu Zeitgesamtheiten[1]). Bekanntlich ist zur Überwindung oder Umgehung dieser Schwierigkeit durch Maxwell und Boltzmann die Ergodenhypothese eingeführt worden, die in der einen oder anderen Form jeder statistisch-physikalischen Untersuchung zugrunde liegt. P. u. T. Ehrenfest haben das logisch Unbefriedigende eines derartigen Aufbaus in unübertrefflicher Weise gekennzeichnet und mit Recht ausgesprochen, daß ein entscheidender Fortschritt nur von einer Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu erwarten sei[2]). Es ist der Zweck der folgenden Zeilen, anzudeuten, in welcher Weise die von mir anderwärts durchgeführte Grundlegung einer exakten Wahrscheinlichkeitsrechnung[3]) völlig ungezwungen zu einem Aufbau der physikalisch-statistischen Theorien führt, bei dem die Ergodenhypothese (und jede ähnliche Annahme) ausgeschaltet bleibt. An ihre Stelle treten lediglich Annahmen über „Ausgangs-Wahrscheinlichkeiten", z. B. über die Gleichmöglichkeit gewisser primitiver Fälle. Der entscheidende, unten näher ausgeführte Gedanke liegt darin, daß nicht, wie üblich, eine Gesamtheit mit gegebenen Wahrscheinlichkeiten, sondern deren zwei gleichberechtigt nebeneinanderstehende, zum Ausgangspunkt genommen werden. Dabei erweist sich die gewohnte Unterscheidung in virtuelle, Zeit- und Raumgesamtheiten als für eine logisch einwandfreie Darstellung nicht zureichend.

Im zweiten Teil der vorliegenden Note wird als Beispiel zu den „Allgemeinen Betrachtungen" die Theorie der Brownschen Bewegung etwas eingehender erörtert. Eine ausführlichere Darstellung der Grundzüge der physikalischen Statistik, in der auch die in Betracht kommenden Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie wiedergegeben werden sollen, beabsichtige ich später zu veröffentlichen.

1. Die Rolle der Ergodenhypothese. Zunächst ist es notwendig festzustellen, in welcher Funktion die Ergodenhypothese innerhalb des Aufbaus der statistischen Theorien zu ersetzen ist. Man muß zwischen einer Ergodenhypothese im engeren und im weiteren Sinn unterscheiden.

Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese im engeren Sinn heißt die Annahme, daß das ins Auge gefaßte mechanische System im Laufe der Zeit alle Zustände, die mit der ihm mitgegebenen Totalenergie verträglich sind, tatsächlich durchläuft (oder mindestens jedem solchen Zustand beliebig nahe kommt). Daß bisher kein Beispiel eines mechanischen Systems bekannt wurde, für das ein derartiges Verhalten aus den mechanischen Gleichungen abgeleitet werden könnte, kommt hier nicht in Betracht. Man weiß jedoch, daß zufolge des Liouvilleschen Satzes die Ergodenhypothese gleichbedeutend ist mit der Annahme gleicher mittlerer kinetischer Energie für alle Freiheitsgrade des Systems. Da diese Annahme in der Theorie der Strahlung, der spezifischen Wärme bei niederen Temperaturen usw., in grellem Widerspruch mit der Erfahrung steht, mußte man die „engere" Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese in vielen Fällen aufgeben.

1) Die in der letzten Zeit mehr in den Vordergrund des Interesses getretene Schwierigkeit der richtigen „Quantelung" ist ein physikalisches, und kein statistisches Problem.

2) Enzyklop. d. math. Wiss. 4, 32, insbes. Nr. 27—30.

3) Grundlagen d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 5, 52—99, 1919; Fundamentalsätze d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, ebenda 4, 1—97, 1919. Eine populäre Darstellung einiger Hauptgedanken der „Grundlagen" vgl. in Die Naturwissenschaften 7, Heft 11—13, 1919.

Nun ist die Ergodenhypothese keineswegs dazu geschaffen worden, um den für ideale Gase bei höheren Temperaturen brauchbaren Gleichverteilungssatz der kinetischen Energie zu liefern. Ihr Zweck war vielmehr, die folgende Schlußweise in der Statistik zu ermöglichen:

Innerhalb einer unendlichen Folge von Exemplaren des gleichen mechanischen Systems sei die relative Häufigkeit für das Auftreten eines Zustandes (Wert der Systemkoordinaten und Geschwindigkeitsparameter), der einem bestimmt abgegrenzten Zustandsgebiet A von konstanter Energie angehört, zu W_A festgestellt; dabei erfülle die Verteilung der W_A-Werte über alle Zustandsgebiete A die aus dem Liouvilleschen Satz fließenden Bedingungen des Stationärseins. Dann soll daraus gefolgert werden können, daß beim tatsächlichen Ablauf der Bewegung eines jeden Exemplars des mechanischen Systems die relative Zeitdauer des Aufenthalts im Zustandsgebiet A ebenfalls W_A sei.

In der Tat reicht die Ergodenhypothese hin, um diese Schlußweise zu ermöglichen. Bezeichnet nämlich N die Anzahl der betrachteten Exemplare des mechanischen Systems, so ist im limes für $N = \infty$ das Produkt NW_A die Anzahl der im Zustandsgebiet A befindlichen Systeme. Da die Verteilung sich voraussetzungsgemäß dauernd aufrecht erhält, so ist bei Betrachtung einer beliebigen Zeitstrecke T der Quotient $NW_A T : N$ die durchschnittlich auf ein Exemplar entfallende Dauer des Aufenthalts in A. Zufolge der Ergodenhypothese ist aber für unendlich lange Zeitdauer T das Verhalten jedes der Exemplare dasselbe, weil ja jedes dieselbe Energiefläche vollständig durchläuft[1]). Also ist für jedes die relative Aufenthaltsdauer im limes für $T = \infty$ gleich $NW_A T : NT = W_A$, w. z. b. w. — Wie weit man hier schon mit der Quasi-Ergodenhypothese allein das Auslangen finden kann, kommt für uns wieder nicht in Betracht.

Aber die Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese im engeren Sinne ist zur Ermöglichung dieser Schlußweise nicht notwendig. Wir wollen als „Ergodenhypothese im weiteren Sinn" jede Annahme bezeichnen, durch welche die oben gekennzeichnete Schlußform ermöglicht wird, jede Annahme also, die gestattet, den für irgendeine konstruierte Gesamtheit auf kombinatorischem Weg errechneten Wert einer relativen Häufigkeit hinterher zu deuten als die relative Zeitdauer beim wirklichen Ablauf der Bewegung eines bestimmten mechanischen Systems. Indem wir nicht nur die ursprüngliche Ergodenhypothese, sondern auch jede im eben umschriebenen weiteren Sinn, aus unserer Theorie ausschließen, verwerfen wir somit nicht nur die obige Schlußform, sondern auch ihr Ergebnis. In der Tat stellt sich die hier anzudeutende neue Theorie auf den Standpunkt, daß bestimmte Aussagen über den wirklichen Ablauf der Bewegung eines einzelnen Systems nur aus den mechanischen Gleichungen, aber niemals aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abgeleitet werden können. — Wir wollen uns zunächst an drei typischen Beispielen, der klassischen Gastheorie, der Quantentheorie und der Thorie der Brownschen Bewegung die Verhältnisse näher ansehen.

Die klassische Gastheorie ist die Domäne der engeren Ergodenhypothese. Hier wird angenommen, daß das Gasmodell alle mit seiner Totalenergie E verträglichen Zustände — die durch Koordinaten- und Parameterwerte der einzelnen Moleküle gekennzeichnet werden — erreichen kann und im Sinne der Ergodenhypothese in unendlich langer Zeit auch tatsächlich erreicht. Der Liouvillesche Satz führt dann dahin, daß W_A dem in bestimmter Weise (als infinitesimales Volumen im $6n$ dimensionalen Phasenraum) zu messenden Inhalt des Zustandsgebietes A proportional gesetzt werden muß, damit es sich stationär aufrecht erhält. Berechnet wird nun z. B., daß der weitaus größte Teil des überhaupt zur Verfügung stehenden Zustandsraumes von jenen Zuständen erfüllt wird, die einer gewissen (der Maxwell-Boltzmannschen) Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle entsprechen, also so, daß W_A für dieses Gebiet A (den zur M.-B.-Verteilung gehörigen „Stern" nach Ehrenfest) sehr nahe angenähert 1 wird. Aus der Ergodenhypothese wird geschlossen (H-Theorem): Das Gasmodell bewegt sich tatsächlich so, daß es die überwiegend längste Zeit im Zustandsgebiet A anzutreffen ist[1]). Auch andere ähnliche Schlüsse ergeben sich durch analoge Übertragungen von der „virtuellen" auf die „Zeit"-Gesamtheit.

Die Quantentheorie geht von vornherein von Vorstellungen aus, die mit der engeren Ergodenhypothese im Widerspruch stehen (womit zugleich jede Grundlage für den Gleichverteilungssatz der kinetischen Energie wegfällt). Sie nimmt nämlich an, daß das mechanische System, das hier etwa aus sehr vielen elastisch gekoppelten Atommodellen bestehen mag, unter

1) Die „Geschwindigkeit" des Phasenpunktes ist zufolge der mechanischen Gleichungen eine eindeutige Funktion seiner Koordinaten, unabhängig von den Anfangsbedingungen.

1) Auf gewisse „modifizierte" Fassungen des H-Theorems kommen wir noch weiter unten zurück.

den mit seiner Gesamtenergie verträglichen Zuständen nur ganz bestimmte, diskret liegende erreichen kann, z. B. solche, die durch ganzzahlige Werte[1]) der auf die einzelnen Atome entfallenden Teilenergie herausgehoben werden. Der Liouvillesche Satz gibt dann für das Stationärbleiben der Verteilung nur die triviale Bedingung, daß den Zuständen, die vermöge der mechanischen Gleichungen aufeinander folgen, dieselbe relative Häufigkeit zugeschrieben werden muß; das ist immer erfüllt, wenn nicht einzelne Phasenpunkte, sondern ganze Phasenbahnen mit angenommenen Häufigkeitswerten ausgestattet werden. Nun wird wieder berechnet, daß ein bestimmtes Zustandsgebiet — der „Stern", der zur Planckschen Aufteilung der Gesamtenergie auf die einzelnen Freiheitsgrade gehört — die weitaus größte Wahrscheinlichkeit für sich hat. Stillschweigend wird dann angenommen, daß das mechanische System während der überwiegend längsten Zeit seiner tatsächlichen Bewegung in diesem Zustandsgebiet anzutreffen ist. Daß hier eine besondere, der engeren Ergodenhypothese analoge Annahme vorliegt, hat A. Szarvassi klar erkannt und diese unter der treffenden Bezeichnung „Ergozonenhypothese" ausdrücklich formuliert[2]).

Ganz ähnlich liegt es in der Theorie der Brownschen Bewegung, wo man eine Ergodenhypothese bisher nie ausgesprochen, aber umso unbedenklicher angewendet hat. Das mechanische System besteht hier aus einer Gruppe von Brownschen Partikelchen, die in einem widerstehenden Medium die bekannte Zickzackbewegung ausführen. Der Variabilitätsbereich der Zustandsgrößen wird in der Regel so wie in der klassischen Gastheorie als kontinuierlich angesehen, die Bedingung des Stationärbleibens hat dann wesentlich dieselbe Form wie dort, scheidet aber aus der weiteren Untersuchung dadurch aus, daß von den Geschwindigkeiten in der Regel ganz abgesehen wird. Man berechnet hier die Wahrscheinlichkeit W_1 dafür, daß auf einen irgendwie herausgehobenen Raumteil gerade n Partikelchen entfallen; d. h. genauer: unter N gleichen Systemen sind im limes für $N = \infty$ gerade NW_1 so beschaffen, daß von den Koordinatentripeln der einzelnen Teilchen eben n die den Raumteil bestimmenden Ungleichungen erfüllen. (Das Zustandsgebiet A wird durch die Zahl n und die Grenzen des herausgegriffenen Raumteiles definiert.) Um dieses Ergebnis der Rechnung zu „prüfen", beobachtet man ohne Bedenken [Svedberg[1]) u. a.] und mit zweifellosem Erfolg die von einem System in aufeinanderfolgenden Zeiten wirklich durchlaufenen Zustände. Besonders charakteristisch ist das Verfahren von R. Lorenz und W. Eitel[2]), die räumlich nebeneinanderliegende und zeitlich aufeinanderfolgende Teilchenanzahlen als ganz gleichberechtigt behandeln. Der ganzen Auffassung liegt die (weitere) Ergodenhypothese zugrunde, wonach die sogenannte „Zeitgesamtheit" ein getreues Abbild sowohl der „räumlichen" als der „virtuellen" Gesamtheit ist. — Wir werden übrigens im folgenden sehen, daß diese Begriffsbildungen, die schon einem gewissen kritischen Bestreben ihre Entstehung verdanken, für eine einwandfreie Darstellung der Verhältnisse nicht zureichen; zumindest müßte der Begriff der virtuellen Gesamtheit dem der räumlichen und zeitlichen übergeordnet werden.

Es könnte vielleicht einen Augenblick lang fraglich erscheinen, ob denn der Übergang zu zeitlichen Verteilungen überhaupt unentbehrlich ist, ob man nicht in der physikalischen Statistik etwa mit virtuellen Gesamtheiten allein das Auslangen finden kann? Aber eine derartige Betrachtungsweise hätte offenbar keinen physikalischen Inhalt, denn die Physik will ja gerade über den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen etwas aussagen. Auch wäre es widersinnig anzunehmen, daß z. B. die Entropie eines Systems bestimmt sein sollte durch die Häufigkeitsverteilung in einer Gesamtheit, die willkürlich, ohne Rücksicht auf den wirklichen Ablauf der Bewegung konstruiert ist. Geht man andrerseits unmittelbar von zeitlichen Verteilungen aus, wie es Einstein[3]) bei Einführung der Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeitsbeziehung tut, so klafft eine Lücke zwischen dem Ausgangspunkt der Betrachtung und der Anwendung kombinatorischer Formeln[4]) in ihrem weiteren Verlauf. Es besteht eben ein tiefliegender, bisher nicht überwundener Widerspruch in der physikalischen Statistik darin, daß man auf der einen Seite den Ablauf der Vorgänge als durch die physikalischen Gleichungen (die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems) völlig bestimmt ansieht, dann aber doch von ganz anderer Seite her zu bestimmten Aussagen über diesen Ablauf gelangen zu können meint.

2. Die Form des neuen Ansatzes. Die

1) Bzw. ganze Vielfache irgendwelcher Einheiten.
2) Über die Grundlagen der statistischen Mechanik. Denkschr. d. Akad. Wien **95**, 391—460, 1918.

1) Vgl. Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle. Leipzig 1912, S. 140ff.
2) Zeitschr. f. anorg. Chemie **17**, 357—374, 1914.
3) z. B. Ann. d. Phys. (4) **33**, 1275, 1910.
4) Oder, was wesentlich auf dasselbe hinausläuft, von Formeln, die dem Ideenkreis des Gaußschen Fehlergesetzes entstammen.

physikalische Statistik ist ein Teil der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Aufgabe in meinen „Grundlagen" ungefähr folgendermaßen definiert erscheint[1]).

Innerhalb gewisser unendlicher Gesamtheiten oder Folgen von Elementen (Kollektivs) sind die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten (die Wahrscheinlichkeiten) für das Auftreten der verschiedenen Merkmale der Elemente gegeben. Solche Elemente können z. B. bestimmte Beobachtungen an einzelnen Molekülen oder zusammengesetzten mechanischen Systemen sein, ihre Merkmale etwa die beobachteten Lagenkoordinaten und Geschwindigkeitsparameter. Die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten bilden die „Verteilung" des Kollektivs, wobei die Zuordnung der Merkmale an die Elemente zwei Forderungen, eben die nach der Existenz der Grenzwerte und eine weitere nach einer gewissen „Zufallsartigkeit" erfüllen muß. Nun lassen sich aus den zuerst betrachteten Kollektivs mit gegebenen Verteilungen durch verschiedene genau angebbare Operationen andere Kollektivs ableiten. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich ausschließlich damit, die Verteilungen innerhalb der abgeleiteten Kollektivs aus den gegebenen Verteilungen der Ausgangskollektivs zu berechnen.

In der Regel erscheinen die Verteilungen der Ausgangskollektivs in der Gestalt von Annahmen über sogenannte „gleichmögliche Fälle", was aber durchaus nebensächlich ist. Wesentlich ist nur, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung 1. lediglich aus gegebenen oder angenommenen Wahrscheinlichkeiten andere Wahrscheinlichkeiten zu rechnen lehrt (so etwa wie die theoretische Mechanik aus Anfangsgeschwindigkeiten die späteren Geschwindigkeiten des Systems liefert) und 2. daß sie aus ihren Daten immer nur Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Kollektivs, niemals aber bestimmte Aussagen über den tatsächlichen Ablauf eines Vorganges, abzuleiten gestattet. Auf dieser Basis wollen wir jetzt an einem Beispiel zeigen, wie man ohne weitere Hypothesen, nur auf Grund der erforderlichen Annahmen über die Ausgangsverteilungen, zu einer gewissen Beherrschung der in der physikalischen Statistik auftretenden Fragen gelangt.

In der Planckschen Strahlungstheorie betrachtet man als Ausgangskollektiv eine Gesamtheit von unendlich vielen einzelnen Oszillatoren gleicher Schwingungszahl ν. Das Merkmal eines jeden solchen Elementes ist die Anzahl der Energiequanten, die es augenblicklich besitzt, und man pflegt anzunehmen, daß jede überhaupt mögliche Anzahl gleich wahrscheinlich sei. Damit ist die Ausgangsverteilung gegeben. Ein abgeleitetes Kollektiv hat z. B. die Beobachtung einer Gruppe von n solchen Oszillatoren (n endlich) zum Element und die Summe der n Quantenzahlen für jede Gruppe als Merkmal. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, wie man für diese Art der Ableitung (eine sogenannte „Faltung") die neue Verteilung findet, also hier die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ dafür, daß eine Gruppe von n Oszillatoren gerade x Quanten besitzt. Natürlich lassen sich noch verschiedene andere Kollektivs aus dem ursprünglichen konstruieren und ihre Verteilungen berechnen — aber niemals gelangt man auf diesem Wege zu irgendeinem Zusammenhange mit dem zeitlichen Verlauf der Energieänderungen.

Nun kann man aber — und hierin bahnt sich die Lösung des ganzen Problems an — noch ein zweites Ausgangskollektiv der Betrachtung zugrunde legen. Das Element sei jetzt die Beobachtung eines Oszillators von bestimmter Schwingungszahl ν und bestimmter Quantenzahl x_1 durch eine gewisse Zeit τ hindurch; sein Merkmal die Zahl y_1 der Energiequanten, um die sich sein Energieinhalt in der bestimmten Zeitspanne τ ändert. Als gegeben sind jetzt anzusehen die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Änderungsmöglichkeiten in der Zeit τ. Nehmen wir z. B. an, es sei a die Wahrscheinlichkeit für Zu- oder Abnahme um eine Einheit (also für die Merkmale $+1$) und $1-2a$ die Wahrscheinlichkeit dafür, den Energieinhalt unverändert zu erhalten (Merkmal 0). Die Zahl a sei ferner von x_1 unabhängig, d. h. es werde eigentlich eine ganze Reihe neuer Ausgangs-Kollektivs in Betracht gezogen, bei denen man nur untereinander gleiche Verteilungen voraussetzt. Aus den so konstruierten Kollektivs kann man vor allem wieder durch „Faltung" ein neues gewinnen, dessen Element die Beobachtung einer Gruppe von n Oszillatoren mit beliebigen Quantenzahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und dessen Merkmal die in der Zeit τ erfolgende Gesamtänderung y ist. Wichtiger sind für uns zwei andere Kollektivs, deren Elemente die eben bezeichneten Gruppen, aber mit anderen Merkmalen sein sollen: Das eine Mal sei das neue Merkmal die Gruppe der n Quantenzahlen $x_1', x_2' \ldots x_n'$ nach der Zeit τ („n-fache Verbindung"), das andere Mal die Summe

$$x' = x_1' + x_2' + \ldots x_n'$$

(„Verbindung" und darauf folgende „Mischung"). Die zugehörigen, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmenden Verteilungen sind von den $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängig,

1) l. c. §§ 1 und 2, insbes. S. 59.

wir wollen sie mit $V(x_1', x_2' \ldots x_n'; x_1, x_2 \ldots x_n)$ bzw. $v_1(x'; x_1, x_2 \ldots x_n)$ bezeichnen, oder indem wir $\mathfrak{x}$ für den Vektor mit den Komponenten $x_1 \ldots x_n$ schreiben (wobei aber x nicht für die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ steht), kürzer mit $V(\mathfrak{x}'; \mathfrak{x})$ bzw. $v_1(x'; \mathfrak{x})$. Hier bedeutet also V die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Zeit τ aus dem Anfangszustand $\mathfrak{x}$ der Endzustand $\mathfrak{x}'$ hervorgeht, v_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus $\mathfrak{x}$ irgendein Zustand mit der Gesamtenergie x' entsteht.

Es bedarf keiner besonderen Erklärung, wie man durch weitere „Verbindung" zu der durch das Produkt $V(\mathfrak{x}'; \mathfrak{x})\, V(\mathfrak{x}''; \mathfrak{x}') \ldots V(\mathfrak{x}^{(m)}; \mathfrak{x}^{(m-1)})$ gegebenen Wahrscheinlichkeit dafür gelangt, daß die Zustände $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}' \ldots \mathfrak{x}^{(m)}$ in m Zeitteilchen von der Länge τ aufeinanderfolgen, und durch weitere „Mischung" zu der Wahrscheinlichkeit $v_m(x; \mathfrak{x})$ dafür, daß aus dem Zustand $\mathfrak{x}$ nach der Zeit $m\tau$ irgendein Zustand mit der Gesamtenergie x hervorgeht. Man braucht, um v_m zu erhalten, nur die Summe der obigen Produkte über alle Werte der $x_1' \ldots\ldots x_n^{(m)}$ bei konstantem $\mathfrak{x}$ und konstantem

$$x = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots\ldots x_n^{(m)}$$

zu bilden. Summiert man schließlich das Produkt der V über alle jene Wertverbindungen der $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'' \ldots \mathfrak{x}^{(m)}$, für die unter den n Komponentensummen $x_1' + x_2' + \ldots x_n'$, $x_1'' + x_2'' + \ldots\ldots x_n''$, $\ldots\ldots x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots\ldots x_n^{(m)}$ der Summenwert x gerade $y\,m$ mal vorkommt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit $f_m(y; \mathfrak{x}, x)$ dafür, daß in den m Zeitpunkten, die auf den Zustand $\mathfrak{x}$ folgen, die Energie x mit der relativen Häufigkeit y auftritt.

Wird die hier angedeutete Rechnung unter geeigneten, durchaus plausiblen und in weiten Grenzen noch willkürlichen Annahmen für die Ausgangswahrscheinlichkeiten durchgeführt, so erhält man folgendes Resultat: 1. Die Funktion $v_m(x; \mathfrak{x})$ wird für große m und große n von $\mathfrak{x}$ unabhängig und nähert sich dem Wert des oben erwähnten $w_n(x)$, das aus dem ersten Ausgangskollektiv hervorgegangen ist. 2. Die Verteilung $f_m(y; \mathfrak{x}, x)$ verdichtet sich, unter den gleichen Voraussetzungen für m und n, an einer bestimmten, von $\mathfrak{x}$ unabhängigen, nur von x abhängigen Stelle y, die bei $y_0 = w_n(x)$ liegt, derart, daß auf eine sehr enge Umgebung dieser Stelle nahezu die Wahrscheinlichkeit 1, auf den übrigen Bereich von y nahezu 0 entfällt. Mit anderen Worten heißt das: 1. Die erstberechnete Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ dafür, daß eine Gruppe von n Oszillatoren die Energie x besitzt, ist bei großem m und n der Größe nach gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus einem beliebigen Anfangszustand in m Zeitelementen ein Zustand mit der Energie x hervorgeht; und 2. es ist bei großem m und n mit überwiegender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß, wie immer der Anfangszustand war; in m aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ein Zustand von der Energie x sich gerade mit der relativen Häufigkeit $w_n(x)$ zeigt. Diese Sätze treten an Stelle dessen, was in der bisherigen Theorie das Ergebnis der Ergodenhypothese war.

Daß die hier festgestellte Übereinstimmung dreier Größen noch bei verhältnismäßig sehr weiter Wählbarkeit der Ausgangsverteilungen zutrifft, hat seinen Grund darin, daß die „Fundamentalsätze" der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die in ihnen enthaltenen „Gesetze der großen Zahl" eben zu Aussagen führen, die von der Form der Ausgangsverteilungen wesentlich unabhängig sind.

Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die von uns betrachtete „Zeitgesamtheit", etwa die Aufeinanderfolge der m Energiesummen

$$x' = x_1' + x_2' + \ldots\ldots x_n', \quad x'' = x_1'' + x_2'' + \ldots\ldots x_n'', \ldots\ldots x^{(m)} = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots\ldots x_n^{(m)}$$

(deren letzte oben mit x bezeichnet wurde) keineswegs ein Kollektiv bildet. Der ganze Gang der Überlegungen hat in keiner Weise dazu geführt, in ihr ein Kollektiv zu sehen, und sie erfüllt auch nicht die unumgängliche Bedingung der „Zufallsartigkeit" der Zuordnung, da ja zwischen unmittelbar hintereinanderfolgenden Zahlen gewisse Bindungen bestehen. Die relative Zeitdauer y ist somit auch im limes für $m = \infty$, keine Wahrscheinlichkeit im Sinne unserer Definition. In dieser sich von selbst ergebenden Wendung erblicken wir ein besonders befriedigendes Ergebnis der Theorie, da sie den Zwiespalt der Auffassung zwischen kausaler Verknüpfung und Zufälligkeit vermeidet.

Der zweite Teil des oben hervorgehobenen Resultates hat eine auffallende äußere Ähnlichkeit mit einer sogenannten „modifizierten Fassung" des H-Theorems; wir wollen aber zeigen, daß es sich dort um etwas ganz anderes handelt. In der Gastheorie hat man sich gewöhnt, die beiden Gruppen von Merkmalkomponenten, Lagenkoordinaten und Geschwindigkeiten der Moleküle, sehr verschieden zu behandeln. So spricht man in der Regel nur von einer Geschwindigkeitsverteilung und läßt die eigentliche räumliche oder Lagen-Verteilung zunächst unbeachtet. Das, was man dann einen Anfangszustand nennt, legt nur die Geschwindigkeitswerte fest und läßt die der Koordinaten noch offen, so daß es für einen (unvollständig be-

stimmten) „Anfangszustand" noch unendlich viel verschiedene Realisierungen, nämlich mit verschiedenen Raumverteilungen der Moleküle gibt. Unter diesen ist eine bestimmte (oder genauer ein bestimmtes Gebiet von Realisierungen), die der sogenannten molekularen Unordnung entsprechende, von überwiegender Wahrscheinlichkeit, gerechnet von dem ursprünglichen Ausgangskollektiv der Gastheorie aus. Man schließt nun, und zwar unter wesentlicher Verwendung der Ergodenhypothese, daß unter den unendlich viel Exemplaren mit gleichem (unvollständig bestimmten) „Anfangszustand" die überwiegende Mehrzahl das Verhalten aufweisen wird, das das H-Theorem fordert. So kommt eine Aussage zustande, die ähnlich lautet wie unser zweiter Satz, die sich aber ganz in den alten, von der Ergodenhypothese beherrschten Rahmen einfügt. Wir kommen auf den grundsätzlichen Gegensatz der beiden Auffassungen, der in der verschiedenen Stellung zum „Determinationspostulat" liegt, im folgenden Abschnitt zu sprechen und werden dort auch die Gestalt, die unser neuer Ansatz speziell in der Gastheorie erhalten muß, andeuten.

Für das dritte typische Beispiel der physikalischen Statistik, die Theorie der Brownschen Bewegung, geben wir im zweiten Teil dieser Note eine etwas ausführliche Darstellung, so daß sich hier eine Erörterung erübrigt.

3. Die physikalische Bedeutung des neuen Ansatzes. Wenn die theoretische Physik sich den hier vertretenen Standpunkt zu eigen machen sollte, so wird sie die Beseitigung einiger begrifflicher Schwierigkeiten mit dem Verzicht auf einen bisher festgehaltenen Anspruch erkaufen müssen. Wir wollen zeigen, daß es sich dabei um das Aufgeben einer ohnehin unhaltbaren Position handelt.

In der Physik der sichtbaren Welt bestand, bis zum Auftreten der modernen Atomistik, die Auffassung, daß durch den augenblicklichen Zustand (und eventuell die Vergangenheit) eines abgeschlossenen Systems der weitere Ablauf seiner Zustandsänderungen eindeutig gegeben sei. Die atomistischen Theorien seit Boltzmann haben dieses „Determinationspostulat" dahin eingeschränkt, daß nur der mikroskopisch gegebene Anfangszustand (eventuell einschließlich der mikroskopischen Vergangenheit) den weiteren Ablauf, und zwar auch den makroskopischen, bestimmt. Das heißt: es müssen, etwa in der Gastheorie, Lagen- und Geschwindigkeitsparameter aller Moleküle in ihren augenblicklichen Werten gegeben sein, damit sich die weiteren Zustände des ganzen Gases eindeutig berechnen lassen. In diesem Sinne war auch die oben besprochene modifizierte Fassung des H-Theorems zu verstehen.

Die Wendung, die wir hier der physikalischen Statistik geben, verlangt aber eine noch etwas weitergehende Einschränkung des Determinationspostulates.

Das festgefügte Gebäude der Mechanik sichtbarer Körper hat wohl vor allem die Ansicht begründet, daß die Differentialgleichungen der Bewegung, oder die analogen Ansätze etwa der Wärmeleitungstheorie usw., zur völligen Beschreibung eines Erscheinungsablaufes, dessen Anfang gegeben ist, hinreichen. Allein es gibt doch auch in der Grobmechanik ausgedehnter schwerer Körper gewisse Fälle, deren Analogie zum Gasmodell oft bemerkt wurde, und in denen dieser Standpunkt bis jetzt sicherlich nicht praktisch durchgeführt werden konnte und für die Zukunft auch kaum durchführbar erscheint. Wir wollen uns das bekannte Galtonsche Brett oder die „Quincunx" dahin abgeändert denken, daß zwischen den in einem Diagonalgitter angeordneten Nägeln des vertikal gestellten Brettes nicht Kugeln, sondern kleine, ebene kreisrunde Scheibchen herabfallen, so daß sich gleichzeitig mehrere von ihnen hintereinander in derselben Zelle aufhalten können. Wenn man eine sehr große Zahl solcher Scheibchen in irgendeiner Weise auf die Zellen der obersten Reihe aufteilt, so kommen sie, wie man aus unzähligen Beobachtungen weiß, unten in einer Aufteilung an, die sich nach dem ersten Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussagen läßt [Gaußsches Gesetz][1]). Trotzdem also der Vorgang zweifellos von den mechanischen Differentialgleichungen beherrscht wird, besteht das wahrscheinlichkeits-theoretisch errechnete Resultat zu Recht, während der mechanische Ansatz dabei gewissermaßen leer läuft. Man rettet bekanntlich den mechanischen Ansatz durch die Erklärung, die Festlegung des Anfangszustandes durch die Angabe der Zelle, in der sich jedes Scheibchen befindet, sei nicht ausreichend, man müßte die „genaue" Lage jedes Scheibchens, jede Abweichung von der Kreisform usw. kennen, auch sei wohl der von früheren Stößen beeinflußte Schwingungszustand der Nägel, vielleicht auch jeder Windhauch maßgebend usf. Aber es gibt ja auch für den vollkommen idealisierten Fall, exakt runde Scheibchen, exakte Nägelanordnung ohne

1) Das Resultat, zu dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt, lautet für den Fall, daß alle Scheibchen von einer Stelle aus herabfallen, so: Es ist bei großer Zahl von Scheibchen und bei großer Zahl von Reihen mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die Scheibchen in der untersten Reihe sich entsprechend dem Gaußschen Gesetz verteilen.

Spielraum usf. einen mechanischen Ansatz! Das Wesentliche scheint hier zu sein, daß dieser exakte Ansatz eben keine eindeutige Lösung besitzt, sondern, mathematisch gesprochen, durch eine lange Aufeinanderfolge von Verzweigungspunkten charaktersiert wird. In solchen Fällen bedeutet das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unmöglich einen Widerspruch, vielmehr eine — erfahrungsgemäß zutreffende — Ergänzung zur Mechanik.

Die Folgerung, die sich aus diesem Beispiel für unser Problem aufdrängt und die wir als einen wesentlichen Bestandteil in unsere Theorie aufnehmen, ist die, daß auch das Gasmodell und überhaupt jedes einer statistischen Betrachtungsweise zu unterziehende mechanische System sich wie die Gesamtheit der Scheibchen auf dem Galtonschen Brett verhält: Die Bewegung erfolgt „regulär" im Sinne der mechanischen Differentialgleichungen, bis auf einzelne, immer wiederkehrende singuläre Zeitpunkte, in denen Verzweigungen der regulären Lösung eintreten[1]). Der Ablauf der Bewegung eines derartigen (idealisierten) Systems wird durch die mechanischen Gleichungen nicht eindeutig bestimmt und genügt hinsichtlich der durch die Verzweigungspunkte gesetzten Unbestimmtheiten erfahrungsgemäß den Ergebnissen der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unser Standpunkt zum Determinationspostulat der Mechanik ist hiernach wie folgt bestimmt. Nur wenn das mechanische System mit allen inbetracht kommenden Nebenerscheinungen, Unregelmäßigkeiten usf. gegeben wird — was im Falle des Galtonschen Brettes oder des Gasmodells praktisch unerreichbar ist —, lassen die Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Anfangszustand die Folgezustände berechnen. Für das idealisierte System — und nur mit einem solchen haben wir es in allen Problemen der statistischen Mechanik zu tun — besteht diese Determinierung nicht: hier versagt der mechanische Ansatz und nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt zu einer gewissen, freilich andersgearteten, Aussage über den Ablauf der Bewegung.

In der Quantentheorie, der Theorie der Brownschen Bewegung und den meisten anderen Fällen physikalischer Statistik steht die bisher herrschende Auffassung zumindest nicht in offenem Widerspruch zu der hier dargelegten Einschränkung des Determinationspostulats, wohl aber in der Gastheorie. In dieser pflegt man auch heute noch, nach klassischem Vorbild, durch Anfangslage und -geschwindigkeit der Moleküle den ganzen Bewegungsverlauf gemäß den Gesetzen des elastischen Stoßes als eindeutig gegeben anzusehen — trotzdem die dabei ausschlaggebende Annahme der Kugelform der Moleküle längst jede Berechtigung verloren hat. Das Entscheidende scheint darin zu liegen, daß die Größenabmessungen der Moleküle verschwindend klein gegen die mittleren Weglängen vorausgesetzt werden müssen: dänach bedingen verschwindend kleine Änderungen des Anfangszustandes (der Geschwindigkeitsrichtung) endliche Abweichungen des Folgezustandes schon nach dem ersten Stoß, und weiterhin werden jedesmal unendlich kleine Abweichungen für das Ergebnis eines Zusammenstoßes entscheidend. Der Fall liegt also durchaus nicht anders als beim Galtonschen Brett; jeder Zusammenstoß ist ein Verzweigungspunkt der regulären Bahn.

Für den unserer Auffassung entsprechenden Ansatz der kinetischen Gastheorie ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß von jedem Eingehen auf die Mechanik des Stoßvorganges (das ohnehin von der unzutreffenden Annahme der Kugelgestalt beherrscht wäre) abgesehen werden muß. Zugrundezulegen ist erstens ein „räumliches" Ausgangskollektiv, etwa so: Für das einzelne Molekül ist jeder überhaupt mögliche Koordinaten- und Geschwindigkeitswert gleich wahrscheinlich; und zweitens ein „zeitliches" Ausgangskollektiv, etwa: Für jedes Molekül besteht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, in einem Zeitelement τ seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung in bestimmtem Maße zu ändern. Bei der Feststellung dieser Annahmen wird man sich von mechanischen Überlegungen wohl leiten lassen, aber nur von solchen, die der Unbestimmtheit oder Zufallsartigkeit des Vorganges beim Geschwindigkeitswechsel Rechnung tragen.

Für den Begriff der Entropie und die Boltzmannsche Entropie-Wahrscheinlichkeitsrelation ergibt sich im allgemeinen Rahmen unserer Theorie das Folgende. Bekanntlich hat P. Ehrenfest[1]) gezeigt, daß die Verfügung über das (räumlich gedachte) Ausgangskollektiv beschränkt wird durch die Forderung, ein gewisser, der Wärmezufuhr entsprechender Ausdruck, solle einen integrierenden Nenner besitzen; dabei kommt es allerdings nur auf die Abhängigkeit der Ausgangsverteilung von sogenannten „langsam veränderlichen" Parametern an, d. h. von solchen Koordinaten des Systems, in bezug auf die man die mechanischen Gleichungen als von vornherein erfüllt ansieht. Da

1) Vgl. hierzu eine ähnliche Feststellung bei Szarvassi, l. c. S. 414.

1) Diese Zeitschr. 15, 657, 1914 und Ann. d. Phys. 51, 327, 1916.

in unserer Theorie die Verteilungen im ersten und im „zeitlichen" Ausgangskollektiv nicht völlig voneinander unabhängig angenommen werden können, so folgt daraus, daß auch die letztere Verteilung durch das Postulat der Boltzmannschen Relation mitreguliert wird. Hat man sich aber einmal überzeugt, daß eine dem Postulat Genüge leistende Annahme möglich ist, so wird damit — durch die Ergebnisse unserer Theorie — hinterher der von Einstein eingeschlagene Weg gerechtfertigt, wonach die Entropie schlechthin dem log der relativen Aufenthaltsdauer des Systems in dem betreffenden Zustandsgebiet proportional gesetzt wird. Wir müssen diesen Ansatz, um mit allem Vorangehenden im Einklang zu bleiben, nur dahin präzisieren: Entropie ist der Logarithmus der, mit erdrückender Wahrscheinlichkeit beim tatsächlichen Ablauf des Vorganges zu erwartenden, relativen Zeitdauer des Aufenthalts in dem betrachteten Zustandsgebiet.

Man könnte schließlich fragen, ob unser Ansatz vielleicht die Ergodeneigenschaft der Systembahnen tatsächlich bestätigt, etwa in dem Sinn, daß die überwiegende Mehrheit der Bahnen die gesamte Energiefläche erfüllt. Dies läßt sich jedoch nicht folgern. Es könnte sehr gut sein, daß jede Bahn einen Teil der Energiefläche unberührt läßt und daß trotzdem für jedes Zustandsgebiet A in fast allen Bahnen die gleiche zeitliche Häufigkeit resultiert.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

Gleichgewichtssätze für die elektromagnetisch aufgebaute Materie.

Von W. Schottky.

1. Satz: Wird einem materiellen System, daß sich ohne die Einwirkungen äußerer Kräfte in einem kinetischen Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, die Energie ΔU zugeführt, ohne daß dabei die Eigenschaft des Systems, sich ohne äußere Kräfte im Gleichgewicht zu erhalten, verloren geht, so ist die Zunahme der elektromagnetischen Energie, $\Delta \mathfrak{E}$, gleich der doppelten Zunahme der Gesamtenergie, während die Energie der inneren Bewegungen, L, daher um den Betrag ΔU abnimmt.

2. Satz: Wird insbesondere ein materielles System, das sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, in verschiedene Teile zerlegt, für die dasselbe gilt, so ist die Zunahme der elektromagnetischen Energie des Gesamtsystems gleich der doppelten Trennungsenergie, während die Energie der inneren Bewegungen[1]) dabei um den Betrag der Trennungsenergie abnimmt.

3. Satz: In einem materiellen System, das sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, vermindert sich die Energie der inneren Bewegungen mit steigender Temperatur; ihren höchsten Wert hat diese Bewegungsenergie beim absoluten Nullpunkt der Temperatur.

4. Satz: Wird ein materielles System, das sich ohne die Einwirkungen äußerer Kräfte in einem kinetischen Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, äußeren Kräften ausgesetzt, die ein neues kinetisches Gleichgewicht herstellen, so ändern sich die elektromagnetischen und kinetischen Energien des Systems erstens entsprechend der im 1. Satz für kräftefreie Systeme aufgestellten Beziehung zur Gesamtenergie; außerdem nimmt aber die kinetische Energie um einen Betrag zu und die elektromagnetische Energie um einen Betrag ab, der durch die in dem System auftretenden Longitudinalspannungsgrößen oder durch das Clausiussche Virial ausdrückbar ist.

5. Satz: In einem „starren Körper" sind die Umwandlungen von elektromagnetischer in kinetische Energie bei Druck- oder Zug-Beanspruchung von höherer Größenordnung als die Änderung der Gesamtenergie des starren Körpers.

Einleitende Bemerkungen. Die unzweifelhaften Erfolge des Rutherford-Bohrschen Atommodelles auf spektraloptischem, chemischem und röntgenspektrographischem Gebiete haben der zeitweise fast aufgegebenen Ansicht von neuem eine gewisse Glaubwürdigkeit verschafft, daß der Aufbau der Materie eine Art kinetischen Gleichgewichtes darstelle, in dem die elektromagnetischen Kräfte, die durch Wechselwirkungen und unter dem Einfluß von Strahlungsfeldern auf die kleinsten Bausteine der Materie wirken, im Mittel ausgeglichen werden, nicht durch statische Gegen-

1) Unter „inneren Bewegungen" verstehen wir die Bewegungen gegen den Schwerpunkt des materiellen Systems, allgemeiner gegen ein Bezugssystem, in dem die Gesamtbewegungsgröße des betrachteten Gebildes verschwindet.

kräfte, sondern durch Trägheitskräfte, z. B. die Zentrifugalkräfte bewegter Massen. Ich glaube deshalb, daß man in einigen sehr merkwürdigen, auf derartige Gleichgewichte bezüglichen Sätzen, die mir schon 1912 bei gewissen Überlegungen entgegentraten, jetzt nicht mehr reine Absurditäten wird erblicken können, sondern, da sie sich bei den uns bekannten Atom- und Molekülmodellen bewähren, ihre Gültigkeit auch für den Aufbau komplizierterer Systeme, insbesondere der festen Materie, für wahrscheinlich halten wird. Mit der Quantentheorie sind diese Sätze durchaus verträglich und werden, soweit von dieser Theorie eine Nullpunktsenergie gefordert wird, sogar von ihr gestützt. Dagegen wird nicht angenommen, daß die Quantenbedingungen zur Stabilisierung der betrachteten Gleichgewichte etwas anderes beitragen, als was sich durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen ausdrücken läßt; man hat ja auch bei den bekannten Atommodellen nie gefunden, daß die Stabilitätsbedingungen irgendwie die Einführung energetischer Zusatzglieder rechtfertigen[1]).

Voraussetzungen. Wir glauben deshalb, daß sich für die Wechselwirkung zwischen den kleinsten Bausteinen der Materie — nehmen wir an, dies seien die — unteilbar gedachten — positiven Kerne auf der einen Seite, die die Kernladung mehr oder weniger vollkommen kompensierenden „Körperelektronen" auf der anderen Seite — folgende energetische Einteilung als genügend erschöpfend erweisen wird: der einen „energetischen Einheit", die aus der Energie, Bewegungsgröße usw. von kleinsten Systemen mit konstanter Masse (Kerne und Elektronen) gebildet wird, und zu der die Eigenfeldenergie der geladenen Teilchen, in Ruhe und Bewegung, mit hinzugerechnet wird, steht als einzige weiter in Betracht zu ziehende energetische Einheit die elektromagnetische gegenüber, und zwar sind hierzu außer den von der Materie losgelösten elektromagnetischen Strahlungserscheinungen nur diejenigen Terme der elektromagnetischen Gesamtenergie usw. zu rechnen, die durch Produktbildung aus den Eigenfeldern verschiedener Teilchen entstehen. Zweifelhaft bleibt dann allerdings die Zuordnung der Feldenergie des Hertzschen Übergangsgebietes; doch ist diese im Verhältnis zu den übrigen Teilen der Energie verschwindend klein, und wir wissen zudem gar nicht, ob die Elementarstrahlung der Materie solche Gebiete enthält. Was die Gravitationswirkungen betrifft, so unterscheiden sich diese, soweit sie sich den elektromagnetischen Feldern einfach superponieren und soweit sie durch das r^{-2}-Gesetz bestimmt sind, in nichts von den elektromagnetischen Wirkungen (vgl. dazu die Ableitung in unseren Schlußbetrachtungen aus dem Virialsatz und den in der Anmerkung zitierten Satz von Lagrange-Poincaré); soweit jedoch bei sehr großer Annäherung der Massen aneinander Abweichungen vom Newtonschen Gesetz vorkommen, denen man etwa die konstituierenden Wirkungen für den inneren Aufbau der Materie zuschreiben möchte, so können diese Abweichungen, wie auch die neuere Einsteinsche Theorie zeigt, bei der Wechselwirkung verschiedener Elementarteilchen aufeinander noch keine merkliche Rolle spielen, sondern nur innerhalb derjenigen Systeme in Betracht kommen, die wir hier als Systeme von konstanter Masse einführen. Wie aber in diesen Systemen die Energie und der Zusammenhalt zustande kommt, kann bei unseren Betrachtungen offen bleiben. Daß die Masse, bis auf relativistische Geschwindigkeits- und noch kleinere Spannungskorrektionen, als konstant angesehen werden kann, geht aus Größenordnungsüberlegungen ohne weiteres hervor.

Beweis der Sätze: Wir bezeichnen in der

1) Anmerkung bei der Korrektur: Durch einen freundlichen Hinweis von Herrn Prof. Einstein bin ich in der Lage, der obigen in winterlicher Einsamkeit niedergeschriebenen Notiz noch nachträglich einige Literaturangaben hinzufügen zu können. In den „Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques" von H. Poincaré, Paris 1911, findet sich auf Seite 93-94 folgender Satz abgeleitet: „In einem System von materiellen Teilchen, die nur unter der Einwirkung ihrer gegenseitigen Gravitation stehen, ist die kinetische Energie gleich der negativen Konstanten der lebendigen Kräfte C, die Kräftefunktion gleich $-2C$". Ableitung aus dem Clausiusschen Virialsatz, und dem r^{-2}-Kraftgesetz, entsprechend unseren Schlußbetrachtungen S. 239. Würde die Konstante $-C$ unter Einbeziehung aller Wärmebewegungen in die kinetische Energie und unter der Voraussetzung der Gültigkeit des r^{-2}-Gesetzes für alle zwischen den materiellen Teilchen wirkenden Kräfte als Gesamtenergie des Systems gedeutet, so würde man unsern 1. Satz, allerdings noch unter Ausschluß von magnetischen und Strahlungserscheinungen, aus diesem Satz ableiten können. Gewisse Ansätze zur Aufstellung einer Energiebilanz im Sinne unseres 1. Satzes sind auch vorhanden; so wird z. B. S. 95, Anmerkung, darauf hingewiesen, daß durch unelastische Stöße der Teilchen unter sich und unter dem Einfluß reibender Medien die kinetische Energie des Systems merkwürdigerweise zunimmt. Übrigens stammt der angeführte Satz auch nicht eigentlich von Poincaré selbst, sondern geht auf viel ältere Betrachtungen von Lagrange, Poisson u. a. zurück, die z. B. von C. G. H. Jacobi in seinen „Vorlesungen über Dynamik" (Berlin 1866) entwickelt werden (Mitteilung von Herrn Dr. E. Freundlich). Die Ableitung, in der übrigens implizite auch der Virialsatz enthalten ist, bezieht sich dort auf statische Zentralkräfte mit beliebigen Kraftexponenten n und kommt zu der Folgerung, daß in Systemen, wie wir sie oben als kinetische Gleichgewichtssysteme bezeichnet haben, die lebendige Kraft dauernd um den Wert $(n+1)\cdot\Phi$, wobei Φ die Kräftefunktion bedeutet, schwanken muß. Daß damals die Beziehungen der zeitlichen Mittelwerte von L und Φ zur Gesamtenergie nicht aufgestellt wurden, ist nur dadurch zu erklären, daß diese Überlegungen noch ganz in den Anfang der Entwicklung der energetischen Betrachtungsweise fallen.

energetischen Einheit der Systeme mit konstanter Masse die (kinetische) Energie (die sich von der Gesamtenergie dieser Systeme nur um einen unter allen Umständen konstanten Betrag unterscheidet), mit L die Bewegungsgröße mit G_x, G_y, G_z die Komponenten der Strömung[1]) dieser Bewegungsgröße durch ein Flächenelement mit x_x, x_y ..... z_z und das vollständige Raumintegral über diese Impulsströmungen mit X_x, X_y, ... Z_z. Für ein einzelnes bewegtes Teilchen gelten dann folgende Beziehungen:

$$L = {}^1/_2 m (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2),$$
$$G_x = m q_x \text{ usw.}$$
$$X_x = q_x G_x \text{ usw.}$$

also

$$X_x + Y_y + Z_z = m (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) = 2L \quad (1)$$

(Bei Berücksichtigung der relativtheoretischen Geschwindigkeitskorrektion steht statt 2 ein etwas kleinerer Faktor, der mit bis c wachsender Geschwindigkeit q bis 1 wächst. Bei allen uns bekannten Geschwindigkeiten im Innern der Materie ist aber der Faktor nahe an 2.)

Da die Beziehung (1) unabhängig von der Masse und Geschwindigkeit des betreffenden Teilchens ist, gilt sie auch für alle betrachteten Teilchen eines Systems zusammen, also allgemein für die betrachtete energetische Einheit.

Auf elektromagnetischem Gebiet bezeichnen wir die Energiedichte mit ε, die Impulsströmungskomponenten mit $\mathfrak{x}_x$, $\mathfrak{x}_y$ ... $\mathfrak{z}_z$, die Gesamtenergie mit $\mathfrak{E}$ und die Raumintegrale über die Impulsströmungskomponenten mit $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y$ ... $\mathfrak{Z}_z$. Dann gilt bekanntlich für die gesamte elektromagnetische Energieeinheit und, wie sich leicht zeigen läßt, auch für die speziell von uns betrachtete „Zwischeneinheit“[2]) die Beziehung:

$$\varepsilon = \mathfrak{x}_x + \mathfrak{y}_y + \mathfrak{z}_z.$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für die Raumintegrale, also:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z. \quad (2)$$

Während die bisher aufgestellten Beziehungen ohne jede spezielle Annahme gelten, beschränken wir uns nunmehr auf Systeme, die im Mittel im „kinetischen Gleichgewicht“ sind, d. h. es soll in diesen Systemen ein Koordinatensystem geben, von dem jede darin feste Ebene die Eigenschaft hat, daß im Zeitmittel keine Energie durch diese Ebene hindurchtritt. Solche Systeme sind z. B. feste Körper, in reflektierende Wände eingeschlossene Hohlraumstrahlungen, Planetensysteme usw. Ferner werde aber auch noch angenommen, daß durch jede solche Ebene keine Bewegungsgröße hindurchtritt; das ist nur möglich, wenn keine äußeren Kräfte auf das System wirken, da sonst ein ständiger Fluß von Bewegungsgröße durch das System hindurch stattfindet. (Bei der Hohlraumstrahlung oder einem eingeschlossenen Gase sind also die Wände mit zu dem System zu rechnen!)

Unter diesen Voraussetzungen gilt definitionsgemäß bei der Integration über den ganzen Bereich B des betrachteten Systems für eine beliebige Koordinate x:

$$\int_B (x_x + \mathfrak{x}_x)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Denn die Summe $x_x + \mathfrak{x}_x$ stellt ja nach unseren Voraussetzungen die totale Impulsströmung dar, deren Gesamtbetrag z. B. auch für die Fläche $x = \text{const.}$ verschwindet. Da dies nun für jeden Wert $x = \text{const.}$ innerhalb des Bereiches B gilt, wo überhaupt noch von 0 verschiedene Werte x_x und $\mathfrak{x}_x$ auftreten, so folgt auch:

$$\int_B (x_x + \mathfrak{x}_x)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

also

$$\left.\begin{aligned} X_x + \mathfrak{X}_x &= 0; \text{ ebenso} \\ Y_y + \mathfrak{Y}_y &= 0, \\ Z_z + \mathfrak{Z}_z &= 0. \end{aligned}\right| \quad (3)$$

und daraus:

$$X_x + Y_y + Z_z = -(\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z) \quad (4)$$

Drücken wir in dieser Beziehung[1]) beide

1) Über diesen Begriff vgl. M. Planck, diese Zeitschr. 9, 828ff., 1908.

2) Alle diese Begriffe und Beziehungen habe ich in meiner Dissertation „Zur relativtheoretischen Energetik und Dynamik“ (Weida 1912) ausführlich entwickelt.

1) Gleichung (4) enthält noch keine Annahmen über die Eigenschaften der nicht materiellen Einheit. Ersetzen wir darin vermöge Gleichung (1) die linke Seite durch $2\bar{L}$, so erhalten wir:

$$2\bar{L} = -(\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z). \quad (4')$$

Diese Gleichung ist mit dem bekannten Clausiusschen Virialsatz

$$2\bar{L} = -\Sigma(xF_x + yF_y + zF_z)$$

auf innigste verwandt, wenn auch nicht ganz identisch. Der Virialsatz beruht nämlich auf der Voraussetzung, daß die Raumintegrale $\int x g_x d\tau$ usw., wobei g die Dichte der materiellen Bewegungsgröße bedeutet, im Zeitmittel konstant sind, während unserer Gleichung (4') dieselbe Voraussetzung nicht für die materielle, sondern für die totale Bewegungsgröße zugrunde liegt. Denn die oben angegebene Voraussetzung unserer Gleichung (4) läßt sich mathematisch auch durch die Forderung formulieren, daß $\int x \gamma_x d\tau$ usw. im Zeitmittel konstant ist, wobei $\gamma = g + \mathfrak{g}$ die Raumdichte der totalen Bewegungsgröße bedeutet.

Man erkennt, daß wegen der Gleichung $\gamma = g + \mathfrak{g}$ zugleich mit Erfüllung der beiden genannten Voraussetzungen auch die betreffende Gleichung für die nichtmaterielle Bewegungsgröße gilt: $\int x \mathfrak{g}_x d\tau$ usw. im Zeitmittel konstant. Läßt man andererseits beide Voraussetzungen gelten, so muß sowohl Gleichung (4') wie der

Seiten vermöge der Gleichungen (1) und (2) durch die betreffenden Energien aus, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\bar{L} &= -\bar{\mathfrak{E}} \\ \bar{L} &= -\frac{\bar{\mathfrak{E}}}{2}. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Führen wir hier noch die Gesamtenergie des Systems, U, ein, in der wir außer der Summe $L + \mathfrak{E}$ noch den konstanten Betrag U_0 berücksichtigen, der von der Eigenenergie der betrachteten Systeme mit konstanter Masse herrührt, so haben wir:

$$U = L + \mathfrak{E} + U_0$$
$$L + \mathfrak{E} = U - U_0.$$

Wird hierin nach Gleichung (5) $\bar{\mathfrak{E}} = -2\bar{L}$ eingesetzt, so folgt:

$$\bar{L} = -(U - U_0)$$

oder

$$\bar{L} = U_0 - U. \qquad (6)$$

Die elektromagnetische Energie $\mathfrak{E}$ dagegen ist nach (5)

$$\bar{\mathfrak{E}} = -2(U_0 - U). \qquad (7)$$

U_0 kann gedeutet werden als die Energie unseres Systems konstanter Massen für den Fall, daß sich alle Massenteilchen unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe befinden. Diesen Zustand der Materie habe ich in einer gleichzeitig in den Annalen der Physik erscheinenden Arbeit „Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum" (Bd. 61, 1920) als „Zustand völliger Dissipation" bezeichnet. Da L notwendig eine positive Größe ist, so folgt aus (6), daß in jedem Zustand, wo die Materie unter dem Einfluß von gegenseitigen elektromagnetischen Wirkungen, Strahlung und Bewegungsenergie sich in dem von uns definierten Gleichgewichtszustande befindet, die Gesamtenergie U kleiner ist, als wenn alle Massenteilchen unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe sind; eine Tatsache, die mit der stets zu einer Verdampfung nötigen Energiezufuhr und ähnlichen Tatsachen im Einklang ist. Dann folgt aber aus (7), daß die elektromagnetische Energie (ausschließlich der Eigenfeldenergie) bei jedem Gleichgewichtssystem stets < 0 ist.

In ihren quantitativen Aussagen können wir den Inhalt der Gleichungen (6) und (7) folgendermaßen formulieren:

In einem kinetischen Gleichgewichtssystem der Materie ist die Energie der inneren Bewegungen dem Betrage nach gleich, den Vorzeichen nach umgekehrt gleich der Gesamtenergie des Systems, gerechnet gegen den Zustand der völligen Dissipation aller betrachteten „Systeme mit konstanter Masse". Der Unterschied der elektromagnetischen Energie gegen den Dissipationszustand ist stets negativ und doppelt so groß als der Unterschied der Gesamtenergie.

In dieser Form, die sich auf die Totalbeträge der verschiedenen Energien bezieht, hat das gefundene Gesetz die Bedeutung einer conditio sine qua non für alle elektromagnetischen Modelle der Materie. Eine unmittelbarere Anwendung scheint jedoch zunächst darin zu liegen, daß man zwei verschiedene mögliche Gleichgewichtszustände der Materie, deren gesamte Energiedifferenz man kennt, vergleicht. Dann erhält unser Resultat die in dem 1. Satz ausgesprochene Formulierung. Beziehen sich die verschiedenen Gleichgewichtszustände auf die Trennung des Gesamtsystems in mehrere einander nicht mehr beeinflussende Einzelsysteme, so gilt der oben formulierte Satz 2, von dem wir gleich noch verschiedene spezielle Anwendungen betrachten werden. Erfolgt die Energieänderung jedoch durch Wärmezufuhr, so gilt der Satz 3; es entspricht dann jeder Zunahme der Gesamtenergie eine Abnahme der inneren kinetischen Energie. Das geht z. B. bei einem festen Körper solange fort, bis er (gegebenenfalls nach dem Schmelzen) so rapide verdampft, daß von einem Gleichgewichtszustand im Innern nicht mehr gesprochen werden kann. Da der absolute Nullpunkt der Temperatur unter dieser Reihe den Zustand geringster Gesamtenergie darstellt, ergibt sich auch der 2. Teil des eingangs formulierten 3. Satzes[1]). Endlich können noch ver-

---

Virialsatz richtig sein. Es muß sich also auch die Beziehung

$$\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z = \Sigma(xF_x + yF_y + zF_z)$$

aus der Voraussetzung

$$\int x\,\mathfrak{g}_x\,d\tau = \text{const usw.}$$

direkt ableiten lassen. In der Tat gelingt dies durch Aufstellung der Strömungsgleichungen für die nichtmaterielle Bewegungsgröße, Multiplikation mit x bzw. y bzw. z, Integration über den ganzen Raum und eine gewisse einfache Umformung.

Nachdem so viel zur exakten Klärung der Voraussetzungen gesagt ist, kann jedoch zum Schluß bemerkt werden, daß abgeschlossene Systeme, in denen nur die eine oder die andere Art von Bewegungsgröße im Zeitmittel keine Verlagerung erfährt, kaum eine physikalische Bedeutung haben werden; diese Voraussetzung wird entweder für alle Arten von Bewegungsgröße gelten oder überhaupt nicht.

1) Damit ist nicht gesagt, daß alle Massenteilchen des Systems mit Erhöhung der Temperatur an kinetischer Energie verlieren müssen. Wir werden weiter unten den Fall des einatomigen in starre Wände eingeschlossenen Gases betrachten, wo die Gasteilchen nach wie vor ihre mit der Temperatur steigende Geschwindigkeit besitzen. Ebenso kann in festen Körpern die Bewegung der Atomschwerpunkte mit der Temperatur wachsen.

schiedene mögliche Gleichgewichtsgruppierungen in beliebig komplizierten planetaren Systemen oder in festen Körpern betrachtet werden, wie wir sie ja für ein und dieselbe stoffliche Zusammensetzung in der unendlich mannigfachen Reihe der verschiedenen chemischen Verbindungen, Modifikationen, Mischkristalle, Legierungen usw. kennen. Auch in diesem Falle wird beim Vergleich zweier verschiedener Zustände der Unterschied der inneren Bewegungsenergie immer entgegengesetzt gleich dem Unterschied der Totalenergien sein müssen.

Beispiele: Eine einfache und bekannte Illustration zu den durch Gleichungen (5) bis (7) ausgedrückten allgemeinen Sätzen bildet die Coulombsche Kreisbahn. Es ist hier

$$\mathfrak{E} = -\frac{e_0 e}{r},$$

wobei e_0 die Ladung des Zentralkörpers, e die des umlaufenden Teilchens bedeutet. Ist die Masse des Zentralkörpers groß gegen die des umlaufenden, so ist

$$L = {}^1\!/_2 m r^2 \omega^2,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit darstellt. Wegen

$$-\frac{e_0 e}{r^2} = m r \omega^2$$

ist

$$L = {}^1\!/_2 m r^2 \omega^2 = -\frac{e_0 e}{2r} = -\frac{\mathfrak{E}}{2},$$

entsprechend Gleichung (5), und demnach auch

$$L = U_0 - U,$$

entsprechend Gleichung (6)[1].

Bei der Coulombschen Ellipsenbahn ist L und $\mathfrak{E}$ zeitlich veränderlich. Durch Mittelwertbildung über einen ganzen Umlauf folgt nach einiger Rechnung, wieder unter der Annahme, daß der Zentralkörper sich an der Bewegung nicht merklich beteiligt:

$$\overline{L} = -\frac{e e_0}{2a} \quad (a \text{ große Halbachse})$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = -\frac{e e_0}{a},$$

also

$$\overline{L} = -\frac{\overline{\mathfrak{E}}}{2},$$

und ebenso wieder Gleichung (6).

Interessanter als diese bereits bekannten Beispiele, denen sich noch z. B. das Debyesche Wasserstoffmolekülmodell anreihen ließe, sind die in ihrem genaueren Mechanismus noch völlig dunklen Fälle; so die Gleichgewichte in festen Körpern, insbesondere den einfachen Salzen. Wir wollen hier einen Prozeß betrachten, der in neuerer Zeit mehrfach zu theoretischen Schlüssen benutzt worden ist[1]), nämlich die beim absoluten Nullpunkt vorgenommene Zusammensetzung eines Salzes mit einwertigen entgegengesetzt geladenen Komponenten, wie $NaCl$, aus den anfangs unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe befindlichen Komponenten Na^+ und Cl^-. Die Gesamtenergie U des Systems wird hierbei um einen Betrag AU vermindert, der pro Mol nach Haber mit D bezeichnet werden möge. Nach unserer Gleichung (6) entspricht dieser Verminderung der Gesamtenergie eine Vermehrung der kinetischen Energie des Systems von dem Betrag D pro Mol. Nun ist aus Röntgenspektrogrammen und Theorien insbesondere von Debye mit Sicherheit zu entnehmen, daß eine oszillatorische Bewegung der Kerne bei tiefen Temperaturen nicht stattfindet. Wenn also das Gleichgewicht wirklich von der angenommenen Art ist, so müssen die die Ionenkerne umkreisenden Elektronen im festen Körper eine größere kinetische Energie besitzen als im leeren Raum, und zwar kann man wohl ohne besondere Hypothese annehmen, daß sowohl beim Na^+ wie beim Cl^- Ion nur die äußerste (nach Kossel aus je 8 Elektronen bestehende) Elektronengruppe eine Änderung ihrer kinetischen Energie erfährt, da die Änderung der Gleichgewichtsbedingungen für die inneren Elektronen verhältnismäßig viel geringer ist. Wie sich allerdings diese Zunahme der kinetischen Energie auf die beiden Ionenarten verteilt, läßt sich aus unseren Betrachtungen in keiner Weise entnehmen; nicht einmal, ob bei beiden Ionensorten die kinetische Energie zunimmt, oder ob sie etwa beim Ion eines Vorzeichens abnimmt, beim anderen desto mehr zunimmt. Doch scheint mir schon die Tatsache, daß die Energieänderungen innerhalb der Ionen von derselben Größenordnung sind wie die Änderungen der Gesamtenergie, für die Gleichgewichtsbetrachtungen wichtig; und da sich die Aufbauenergie D zur kinetischen Energie der äußersten Elektronengruppe größenordnungsmäßig wie der Atomabstand im Kristall zum Durchmesser der äußersten Elektronensphäre eines Ions verhält, so ist noch weiter festzustellen, daß die Änderung der kinetischen

1) N. Bohr hat auf dieselbe Beziehung auch in dem Fall, daß mehrere Elektronen regelmäßig auf einer Kreisbahn verteilt sind, aufmerksam gemacht (vgl. Phil. Mag. **26**, 1, 476, 857, 1913).

1) z. B. von F. Haber, Verh. d. D. Phys. Ges. 1911, S. 1117—1136 und von M. Born, Berl. Ber. 1918, S. 1048—1068 und Verh. d. D. Phys. Ges. 1918, S. 210—270.

Energie dieser Elektronen, die durch die Nachbarionen herbeigeführt wird, von derselben Größenordnung sein kann, wie ihre kinetische Energie selbst. Und weiter: da im ungestörten System die kinetische Energie der umlaufenden Elektronen ihrem Bahnradius umgekehrt proportional ist, wird man annehmen müssen, daß mit der Veränderung der kinetischen Energie der Elektronen im festen Körper auch eine Veränderung ihrer Entfernung vom Kern Hand in Hand geht, die nach unserer Größenordnungsbetrachtung nicht klein zu sein braucht gegen den Absolutbetrag dieser Entfernung im ungestörten System. Die „Atomdurchmesser" sind hiernach ziemlich stark von den Nachbaratomen oder -ionen abhängig. Dieselbe Betrachtung gilt für die Bildung eines einzigen $NaCl$ Moleküls im Dampfraum; überhaupt für jede Verbindung, bei der die Elektronensphäre der Komponenten im ganzen erhalten bleibt.

Eine ganz hübsche Folgerung aus unserem Satz kommt auch bei Betrachtung der Oberflächenenergie zutage. Bei der Teilung eines festen Körpers in 2 Stücke ist der Anfangs- und Endzustand ein Gleichgewicht in unserem Sinne; für den Energieunterschied gilt also unsere Gleichung (6). Danach nimmt die kinetische Energie pro Oberflächeneinheit um den halben Betrag (da sich ja die Energieänderung symmetrisch auf beide Stücke verteilt) der Trennungsarbeit ab. Hat man es wieder mit festen Körpern zu tun, in denen die Kerne ruhen, so muß durch die Trennung die Bewegung der Elektronen in den Oberflächenatomen oder -ionen verlangsamt werden. Und da an der „Innenseite" der Atome noch nahezu die Verhältnisse dieselben sind wie im Innern, so wird sich diese Bewegungsänderung hauptsächlich auf den dem Außenraum zugekehrten Teil der Elektronenbahn erstrecken. Man kann sich etwa vorstellen, daß die Elektronen sich auf dieser Seite weiter vom Kern entfernen, so daß ihre kinetische Energie geringer wird (dies alles auf die geordneten Bahnen bezüglich, also auch beim absoluten Nullpunkt gültig!) und durch diese Unsymmetrie kann wiederum eine resultierende dielektrische Verschiebung an der Oberfläche bewirkt werden, ein elektrostatischer Potentialsprung, dessen Größenordnung sich auf ähnliche Weise schätzen läßt wie die Veränderung der Atomradien im Innern des festen Körpers.

Bis hierher sind immer isolierte Gleichgewichtssysteme betrachtet worden. Wir wollen nunmehr noch die Energiebilanz in einem System behandeln, das mit äußeren Kräften im Gleichgewicht ist. Es bleiben dann für das System, auf welches die Kräfte wirken, die Gleichungen (1) und (2) unverändert bestehen; die Gleichungen (3) sind jedoch zu ersetzen durch:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_x + \overline{\mathfrak{X}}_x &= \overline{\Xi}_x \\ \overline{Y}_x + \overline{\mathfrak{Y}}_x &= \overline{H}_x \\ \overline{Z}_x + \overline{\mathfrak{Z}}_x &= \overline{Z}_x \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wobei die Größen $\overline{\Xi}_x$[1]) usw. die Zeitmittel der Raumintegrale $\int \xi_x d\tau$ über die totalen Impulsströmungskomponenten $\xi_x = x_x + \mathfrak{x}_x$ des betrachteten Systems darstellen. Handelt es sich bei den behandelten Systemen um „elastische Medien", so sind die Größen ξ_x usw. die gewöhnlichen elastischen Spannungskomponenten der Elastizitätstheorie, z. B. ist bei Flüssigkeiten $\xi_x = \eta_y = \zeta_z = p$, $\Xi_x = p \cdot V$ usw., wobei V das Volumen der Flüssigkeit darstellt. Bei Systemen, an denen Punktkräfte angreifen, ist nach einer bekannten Umformung $\Xi_x = \Sigma x F_x$ usw., wobei die F_x die an den Punkten x angreifenden Kräfte bedeuten.

Durch Kombination von (1), (2) und (8) ergibt sich für das durch äußere Kräfte im Gleichgewicht gehaltene System:

$$2\overline{L} + \overline{\mathfrak{E}} = \overline{\Xi}_x + \overline{H}_y + \overline{Z}_z \qquad (9)$$

oder nach Einführung der Gesamtenergie $U = U_0 + L + \mathfrak{E}$:

$$\overline{L} = U_0 - \overline{U} + (\overline{\Xi}_x + \overline{H}_y + \overline{Z}_z) \qquad (10)$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = 2(\overline{U} - U_0) - (\overline{\Xi}_x + \overline{H}_y + \overline{Z}_z), \qquad (11)$$

also insbesondere für Systeme mit konstantem Druck p und dem Volumen V

$$\overline{L} = U_0 - \overline{U} + 3\,\overline{p V}, \qquad (10')$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = 2(\overline{U} - U_0) - 3\,\overline{p V}. \qquad (11')$$

Werden zwei Gleichgewichtszustände desselben Systems betrachtet, die sich durch die Gesamtenergie und die äußeren Kräfte unterscheiden, so gelten die den Gleichungen (10) bis (11') entsprechenden Differenzengleichungen, und damit ist auch unser vierter Satz bewiesen. Durch äußeren Druck wird also die kinetische Energie eines Systems im Verhältnis zur Gesamtenergie und zur elektromagnetischen Energie gegenüber dem kräftefreien Zustande vergrößert, durch Zug verkleinert. In einem „starren Körper", der auf äußere Beanspruchung nur mit sehr geringen Ausweichungen reagiert, müssen hiernach trotzdem starke (dem Druck proportionale) innere energetische Umwandlungen vor sich gehen, wenn das elektromagnetisch-

1) Indem wir hier gleich die Mittelwerte der äußeren Kräfte einführen, umfassen wir noch einen allgemeineren Komplex von Erscheinungen, als wenn wir die Kräfte streng zeitlich konstant annehmen würden. Es ist die Gesamtenergie U des betrachteten Systems dann nicht mehr, wie vorher, streng konstant, sondern es ist ebenfalls ihr zeitlicher Mittelwert $\overline{U}$ einzuführen.

kinetische Gleichgewicht aufrecht erhalten bleiben soll.

Welchen Einfluß diese Vorgänge auf die gesamte Energiebilanz eines Systems haben müssen, erkennt man vielleicht am besten am Beispiel eines von „festen" Wänden eingeschlossenen Gases. Wir bezeichnen die auf das Gas bezüglichen Größen durch lateinische Buchstaben ohne Index, die auf das Gesamtsystem bezüglichen durch den Index t (total), die auf die Wände bezüglichen durch einen Strich. Die von uns eingeführten Mittelwertgrößen sind in diesem Fall mit den thermodynamisch = statistischen identisch: $U = U$, $\bar{p} = p$, $\bar{L} = L$ usw. Für ein Gas ist, bei einer Temperaturerhöhung,

$$\Delta L = \Delta U,$$

während für das Gesamtsystem $\Delta L_t = -\Delta U_t$ sein muß. Sind die Wände „starr", so ist

$$\Delta U \backsim \Delta U_t,$$

doch kann unmöglich $\Delta L = \Delta L_t$ sein. Vielmehr ist für ein Mol eines Gases

$$\Delta L = \tfrac{2}{3} R\,\Delta T, \quad \Delta(pV) = R\,\Delta T,$$

also $\Delta L = \tfrac{2}{3}\Delta(pV)$; für die feste Wand ist wegen $\Delta U \backsim 0$ nach (10)

$$\Delta L' = \Delta(\Xi_x' + H_x' + Z_x')$$

oder wegen

$$\Delta(\Xi_x' + H_x' + Z_x') + 3\,\overline{pV}' = 0: \quad \Delta L' = -3\,\Delta(pV) = -2\,\Delta L.$$

Also:

$$\Delta L_t = \Delta L + \Delta L' = -\Delta L = -\Delta U = -\Delta U_t.$$

Es könnte hier eingewendet werden, daß es bei elektromagnetisch-kinetischen Gleichgewichten wahrscheinlich gar nicht möglich ist, daß Spannungen und damit verbundene Änderungen der inneren kinetischen Energie auftreten, ohne daß sich gleichzeitig die Gesamtenergie des Systems ändert. Wir wollen deshalb auf diese Frage noch etwas genauer eingehen und darauf hinweisen, daß bei der Veränderung einer Linear-dimension l eines solchen Gebildes (wir denken z. B. an einen festen Körper, insbesondere an Kristalle) um die unendlich kleine Strecke λ die Änderung der Totalenergie von der Größenordnung λ^2 ist, während die Änderung der Spannungsgrößen Ξ_x usw. nur von 1. Ordnung unendlich klein in λ ist. Demnach ist also bei kleinen Verrückungen aus der natürlichen Gleichgewichtslage die erste und einzige Energieumwandlung, die stattfindet, die von elektromagnetischer in kinetische Energie (bei Druck; bei Zug umgekehrt), während die Totalenergie noch merklich konstant bleibt. (Satz 5.) Dieses Resultat scheint mir eine nicht unwichtige Anwendung im Rahmen einer neuerdings von M. Born (a. a. O.) angestellten Betrachtung zu finden, in der ein Zusammenhang zwischen der Kompressibilität kristallinischer Substanzen und den Abstoßungsgesetzen der Elektronensphären behandelt wird. Ohne Zweifel ist es formal berechtigt, die Abstoßungskräfte der Elektronensphären neben den Anziehungskräften der entgegengesetzt geladenen Gesamtionen durch ein Exponentialgesetz mit unbekanntem Exponenten einzuführen, und ebenso ist es berechtigt, die Gesamtkräfte mehrerer Ionen aufeinander aus den elektrostatischen Kräften zu berechnen, die die irgendwie eingeführten Atommodelle (z. B. mit Bohrschen Elektronenringen) aufeinander ausüben. Jedoch scheint es nach dem obigen Satz nicht mehr erlaubt, bei der Berechnung von Kompressibilitäten, wo die Änderungen der Abstoßungskräfte bei einer Kompression des Systems eine Rolle spielen, die Abstoßungsgesetze bei konstanten Ringradien mit dem experimentellen Befund der Kompressibilität zu vergleichen. Da nämlich die Änderung der kinetischen Energie der Ringsysteme nach dem oben gefundenen allgemeinen Gesetz in λ von erster Ordnung sein müßte, ist zu folgern, daß sich auch die inneren linearen Abmessungen eines Atoms (Radien der Elektronenringe) mit λ in erster Ordnung ändern; da diese Änderungen nun wiederum in der Umgebung des Atoms Kraftänderungen bewirken müssen, die von erster Ordnung in λ, also von derselben Größenordnung wie die durch die gegenseitige Verschiebung der Atome bedingten Kraftänderungen, sind, so scheint mir die Berücksichtigung dieser inneren Änderungen, von denen Herr Born annimmt, daß sie das Resultat nicht wesentlich beeinflussen, doch bei diesen Betrachtungen unumgänglich nötig. Im einfacheren Beispiel zweier durch einen Ring zusammengehaltener Kerne (Debye) oder zweier verschieden geladener Kerne mit 2 Einzelringen kann man das Größenordnungsmäßige und auch den Sinn dieser Wirkungen näher verfolgen, doch würde ein Eingehen hierauf außerhalb des Rahmens dieser allgemeinen Betrachtungen liegen[1]).

1) Es sei bemerkt, daß die Gleichgewichtssätze, mit denen wir es hier zu tun haben, vielleicht auch einen Aufschluß darüber geben, weshalb das sogenannte „Hantelmodell", insbesondere des Wasserstoffmoleküls, bei allen genaueren Berechnungen von spezifischen Wärmen, Rotationsspektren usw. versagt hat (wegen der spezifischen Wärmen vgl. insbesondere die Abhandlung von F. Reiche, Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs, Ann. d. Phys. **58**, 657—694. 1919]. Nach meinem Urteil hängt dies damit zusammen, daß ein aus wenigen Bausteinen aufgebautes elektromagnetisches System undenkbar ist, dessen ganze Energiezunahme bei einer Temperaturerhöhung in einer Vermehrung der Rotationsenergie besteht. Vielmehr muß nach unserm Satz 3 die Änderung der elektromagnetischen Energie und die gewisser anderer innerkinetischer

Nichtelektromagnetische Kräfte. Eine andere Frage soll jedoch noch zum Schluß aufgeworfen und beantwortet werden. Es ist bekannt, daß sich die bisherigen Anschauungen über den Zusammenhang von kinetischer, potentieller und totaler Energie, insbesondere in festen Körpern, meist auf der Annahme quasielastischer Kräfte aufbauten, die das — in der Gleichgewichtslage ruhende — Massenteilchen mit einer der Elongation proportionalen Kraft in die Gleichgewichtslage zurückzuziehen streben. Bei Annahme dieses Kraftgesetzes gilt bekanntlich eine ganz andere Beziehung als (5), (6) und (7); sowohl die mittlere potentielle, wie die mittlere kinetische Energie wächst mit der Gesamtenergie, und beide Teile sind einander gleich und gleich der Hälfte der Gesamtenergie. Bezeichnet man die Elongation von dem Anziehungszentrum aus mit r, so findet also bei einem Kraftgesetz proportional r^{+1} ein Wachsen der kinetischen Energie mit der Gesamtenergie statt. Andererseits sind die elektromagnetischen Kräfte (bei den hier einzuführenden Spezialannahmen, auf die wir gleich weiter unten zurückkommen) bekanntlich charakterisiert durch Anziehungskräfte, die in r von der -2. Ordnung sind; hierbei nimmt die kinetische Energie mit zunehmender Gesamtenergie ab. Zwischen den Exponenten $n = -2$ und $n = +1$ muß es also einen Exponenten n_0 geben, bei dem die kinetische Energie mit veränderlicher Totalenergie in Gleichgewichtssystemen weder zu- noch abnimmt, sondern konstant bleibt, und es entsteht die Aufgabe, den Wert dieses Exponenten zu bestimmen.

Wir beschränken uns bei dieser Betrachtung auf die Annahme zweier Massenpunkte, von denen noch der eine, dessen Masse groß gegen die des anderen sei, ruhend angenommen werde. Das gefundene Resultat gilt trotzdem, wie man sich leicht überzeugen kann, ganz allgemein. Die kinetische Energie des Systems ist dann wieder gegeben durch $L = \frac{m}{2} q^2$, wobei m die Masse, q die Geschwindigkeit des leichteren Massenpunktes bedeutet, und es gilt, wie vorher, zwischen L und den Impulsströmungsgrößen X_x, Y_y, Z_z dieses Systems mit konstanter Masse die Beziehung (1). Für die andere Energieeinheit, deren Bestimmungsgrößen wir mit E', X_x' usw. bezeichnen, gilt die Spezialisierung des quasi-statischen Zustandes, der energetisch dadurch definiert ist, daß in dieser Energieeinheit keine eigene Bewegungsgröße, sondern nur Energien und Impulsströmungen auftreten; die Kräfte F, die von dieser Energieeinheit dann auf die Massenpunkte ausgeübt werden, lassen sich infolgedessen aus Impulsströmungen oder Spannungen ableiten, und es ist

$$X'_x = \Sigma x F_x \text{ usw.}$$

(Beweis wie oben in der den Clausiusschen Virialsatz behandelnden Anmerkung, unter Berücksichtigung von $g' = 0$.)

Sind nur 2 Massenpunkte vorhanden, von denen der eine, ruhende, im Koordinatenanfangspunkt angenommen werde, so ist $X_x' = x F_x$, wobei x die Abszisse des bewegten Punktes, F_x die auf diesen Massenpunkt wirkende Kraft ist. Ist die Kraft, die wir annehmen, eine Zentralkraft, so ist

$$X_x' + Y_y' + Z_z' = r F_r. \tag{12}$$

Die Energie E' dagegen ist zufolge der Annahme des quasi-statischen Zustandes

$$E' = -\int_{\infty}^{r} F_r' \, dr. \tag{13}$$

Ist nun $F_r = -\frac{A}{r^2}$ (A eine Konstante), so ist

$$r F_r = -\frac{A}{r}, \quad -\int_{\infty}^{r} F_r' \, dr = -\frac{A}{r},$$

$$\text{also } X_x' + Y_y' + Z_z' = E',$$

wie wir es allgemeiner schon in Gleichung (2) gefunden hatten, und diese Beziehung führt, wie wir wissen, zu einer in Gleichgewichtssystemen im umgekehrten Sinne wie die Totalenergie wachsenden kinetischen Energie. Jetzt wollen wir jedoch die allgemeine Beziehung zwischen L und U beim beliebigen Exponenten n für Gleichgewichtssysteme aufstellen.

Wegen der Forderung des kinetischen Gleichgewichts ist:

$$\overline{X_x} + \overline{X_x'} = 0 \text{ usw.}$$

$$\overline{X_x} + \overline{Y_y} + \overline{Z_z} = -(X_x' + Y_y' + Z_z')$$

oder, nach (1) und (12),

$$2L = -r F_r [1]. \tag{14}$$

Energien (— auch hier handelt es sich offenbar um die umlaufenden Elektronen —) bei einer Temperaturerhöhung die Zunahme der Rotationsenergie soweit überwiegen, daß im ganzen eine Abnahme der kinetischen Energie erfolgt. Dann wird aber allen Betrachtungen, die sich auf die Quantelung der Rotation allein, auf die Frage nach einer Nullpunktsenergie der Rotation usw. beziehen, die eigentliche Grundlage entzogen.

1) Dies ist wieder der Clausiussche Virialsatz, angewendet auf das spezielle, von uns betrachtete System. Wir hatten schon oben bemerkt, daß unsere Voraussetzung des kinetischen Gleichgewichts: $\overline{X_x} + \overline{X_x'} = 0$ usw. in Verbindung mit der Annahme, daß keine Verlagerung der nicht materiellen Bewegungsgröße g' stattfindet (— hier ist speziell $g' = 0$ —), mit der Voraussetzung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int x g_x \, d\tau = 0$$

des Clausiusschen Virialsatzes identisch ist.

Da nun $U - U_0 = L + E'$ ist, so ist weiter nach (13) und (14)

$$U - U_0 = -\frac{1}{2} r F_r - \int_0^r F_r dr. \qquad (15)$$

Ist nun $F_r = Ar^n$, so ist $rF_r = Ar^{n+1}$, also

$$L = -\frac{1}{2} Ar^{n+1}.$$

Andererseits:

$$-\int_0^r Ar^n dr = -\frac{1}{n+1} Ar^{n+1} + \text{const}^1),$$

also:

$$U - U_0 = -\frac{A}{2} r^{n+1} - \frac{A}{n+1} r^{n+1} +$$

$$+ \text{const} = -A\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right) r^{n+1} + \text{const.},$$

$$U - U_0 = -\frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{A}{2} r^{n+1} + \text{const.},$$

oder wegen

$$-\frac{A}{2} r^{n+1} = L:$$

$$U - U_0 = \frac{n+3}{n+1} \cdot L + \text{const.}$$

Es besteht also die Differenzengleichung:

$$\Delta L = \frac{n+1}{n+3} \Delta U. \qquad (16)$$

Für $n = -2$ folgt auch hieraus wieder

$$\Delta L = -\Delta U,$$

für $n = +1$

$$\Delta L = \frac{1}{2} \Delta U.$$

Allgemein liest man aus (16) ab, daß L für $n < -3$ und $n > -1$ mit wachsendem U wächst, in dem Zwischengebiet $-3 < n < -1$ jedoch mit wachsendem U abnimmt. Die kritischen Werte sind also $n_2 = -3$, wo $\frac{dU}{dL} = 0$ ist, und $n_1 = -1$, wo $\frac{dL}{dU} = 0$ ist.

1) Bei Kraftexponenten $n < -1$ wird diese Konstante $= 0$, dagegen bei $n \geq -1$ unendlich, d. h. es kann dann nicht mehr der „Zustand völliger Dissipation" als Anfangszustand der Energie beibehalten werden. In diesem Falle wählt man zweckmäßig den Zustand $r = 0$ als Nullzustand der Energie und definiert E' durch

$$E' = \int_0^r F_r' dr.$$

Wir haben jedoch im Text, da es auf den Wert der Konstanten nicht ankommt, die einheitliche Definition der Energie beibehalten.

Würde die alte Ansicht und Forderung beibehalten, daß die kinetische Energie eines abgeschlossenen Gleichgewichtssystems sich mit wachsender Totalenergie (z. B. infolge Wärmezufuhr) erhöhen muß, so müßten unbedingt Kraftgesetze eingeführt werden, in denen die Kraftwirkung[1]) zwischen 2 Massenpunkten einer Potenz der Entfernung proportional ist, die kleiner ist als -3 oder größer als -1.

Zusammenfassung.

1. Unter der Annahme eines elektromagnetisch-kinetischen Aufbaus der Materie und auf Grund einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden energetischen Einteilung des gesamten Naturkomplexes in kleinste „Systeme mit konstanter Masse" einerseits, einer „elektromagnetischen Zwischeneinheit" andererseits, werden mit Hilfe allgemeiner energetischer Begriffe und Sätze die Beziehungen zwischen kinetischer, elektromagnetischer und Gesamt-Energie abgeleitet, die etwa in den Sätzen 1—3 ihren physikalisch brauchbarsten Ausdruck finden.

2. Nachdem diese Beziehungen an der Kreis- und Ellipsenbahn des Rutherford-Bohrschen Wasserstoffatommodells exemplifiziert sind, werden die in ihren Einzelheiten noch nicht übersehbaren Prozesse der Verdampfung (insbesondere beim absoluten Nullpunkt) und des Zerbrechens eines festen Körpers im Lichte dieser Beziehungen betrachtet und es wird die Abnahme der innermolekularen kinetischen Energie bei der Verdampfung zur Verdampfungswärme in Beziehung gesetzt.

3. Insbesondere wird bei festen Salzen (z. B. $NaCl$) eine Zunahme der kinetischen Gesamtenergie der Elektronen der äußersten Sphären gegenüber dem Dampfzustand (Na^+- und Cl^--Ion) gefolgert. Mittels eines auch für gestörte Systeme angenommenen Zusammenhanges zwischen kinetischer Energie der äußersten Körperelektronen und ihrem „Bahnradius" bzw. dem Atomhalbmesser wird ein größenordnungsmäßiger Zusammenhang zwischen der Änderung des Atomhalbmessers durch Verdampfung bzw. Kondensation und der Verdampfungswärme festgestellt. Diese Änderung ist hiernach nicht klein gegen den Atomhalbmesser selbst, sondern

1) Das Vorzeichen der Kräfte, die ein System von Massenpunkten im kinetischen Gleichgewicht halten sollen, bestimmt sich gemäß dem Clausiusschen Virialsatz wegen der Forderung $L > 0$ durch die Bedingung

$$\Sigma x F_x + y F_y + z F_z < 0.$$

Sind nur 2 Massenpunkte vorhanden, so wird gefordert: $rF_r < 0$, d. h. $F_r < 0$. Die Kraft muß also eine Anziehungskraft sein.

von derselben Größenordnung. Ähnliche Betrachtungen führen zu größenordnungsmäßigen Angaben über gewisse an der Oberfläche fester Körper auftretende Potentialsprünge.

4. Unter dem Gesichtspunkt des Satzes 1 wird darauf hingewiesen, daß die Annahme eines elektromagnetisch aufgebauten „Hantelmodells" (z. B. des H_2-Moleküls) eine innere Schwierigkeit enthält, insofern als bei einem elektromagnetisch-kinetischen Modell keine ungestörte Superposition einer Rotationsenergie mit irgendwelchen anderen Arten von innermolekularer Energie möglich ist.

5. Unter Erweiterung der energetischen Betrachtungen für den Fall von außen angreifender Kräfte werden die Gleichgewichtssätze 4 und 5 abgeleitet.

6. Es wird insbesondere der Fall des von festen Wänden eingeschlossenen Gases behandelt, und gezeigt, daß sich die scheinbare Schwierigkeit zwischen dem Satz 3 und der bekannten gaskinetischen Beziehung zwischen Gesamtenergie des Gases und der lebendigen Kraft seiner Moleküle dadurch löst, daß in den „starren" Wänden unter dem Einfluß des Druckes eine beträchtliche Umwandlung von potentieller in kinetische Energie vor sich gehen muß.

7. Der Fall des „starren" Körpers wird dann noch näher untersucht und festgestellt, daß bei einer kleinen Verschiebung λ aus dem kräftefreien Zustand die Umwandlung von elektromagnetischer in kinetische Energie proportional λ ist, während die Änderung der Gesamtenergie proportional λ^2, also von kleinerer Größenordnung ist.

8. Im Anschluß hieran wird darauf hingewiesen, daß bei Kompressibilitätsberechnungen die Änderungen der Atomhalbmesser (speziell der „Ringradien") bei der Kompression nicht vernachlässigt werden dürfen.

9. Zum Schluß wird die den Sätzen 1—3 zugrunde liegende Beziehung für den Spezialfall elektrostatischer Kräfte auf anderem Wege abgeleitet, wobei eine anfangs benutzte allgemeine Beziehung in den Clausiusschen Virialsatz übergeht.

10. Es wird die Frage aufgeworfen und beantwortet, welche Potenzen der Entfernung in einem Kraftgesetz auftreten müssen, damit die kinetische Energie eines Gleichgewichtssystems zugleich mit der Gesamtenergie wächst. Alle Exponenten, die größer sind als — 1 und kleiner als — 3, erfüllen diese Bedingung.

Schloß Schaumburg a. d. Lahn, den 12. Januar 1920.

(Eingegangen 3. Februar 1920.)

Erfahrungen bei der Bestimmung der Radioaktivität von Quellwässern.

Von Ottomar Nürnberger[1].

In Sachsen vereinigen sich bei Brambach im oberen Vogtland zahlreiche radioaktive Quellen verschiedener Stärke; dieses Gebiet schien daher besonders geeignet, um die früher (loc. cit.) mitgeteilten Ergebnisse durch Messungen an natürlichen Emanationswässern zu ergänzen. Das sächsische Finanzministerium hat die von Herrn Prof. Wiener nachgesuchte Erlaubnis dazu erteilt. Die Brambacher Sprudelgesellschaft, Radium-Mineralbad Brambach i. V., hat als Inhaberin der Quellen die Beobachtung bereitwilligst gestattet und ihr Laboratorium zur Verfügung gestellt; der Verfasser möchte es nicht unterlassen, auch an dieser Stelle seinen Dank dafür zum Ausdruck zu bringen[2]). Die Quellen liegen alle eng beieinander, so daß alle Versuche im Laboratorium ausgeführt werden konnten. Die Elektroskope wurden mit der Starkstromleitung unter Zwischenschaltung großer Widerstände aufgeladen. Zur Prüfung der Spannungsausschläge war ständig das zur Eichung verwendete Normalvoltmeter angeschlossen. Der Apparat hatte gute Erdung. Starken Quellen wurde zur Verdünnung ausgeschütteltes und völlig inaktives Bachwasser zugesetzt. Vergleichsversuche mit Zusatz von destilliertem Wasser ergaben die Zulässigkeit der Verwendung von Bachwasser. Dagegen durfte ausgeschütteltes Leitungswasser oder anderes Brunnenwasser nicht zugesetzt werden.

Bei der Beobachtung der Eisen- und Wiesenquelle ist es aufgefallen, daß bei der kohlensäurehaltigen Eisenquelle die ersten Ablesungen sehr gute Übereinstimmung mit den Duaneschen Größen zeigen und der Ionisationsstrom erst später zu schnell ansteigt, während bei der etwa gleich starken, aber sehr gasarmen Wiesenquelle die Beobachtungen von Anfang an rascher ansteigen als nach der Duaneschen Kurve zu erwarten wäre. Weitere Versuche bestätigten dies. Die Erscheinung wurde eingehender untersucht; dabei hat sich herausgestellt, daß jeder Quelle eine eigene Anstiegkurve zugehört. Die einzelnen Kurven schmiegen sich wiederum am besten den Duaneschen Größen an, die Abweichungen davon sind für jede Quelle charakteristisch. Diese Unterschiede müssen also als Störungen bezeichnet werden, die nicht auf

1) Herausgegeben von George Jaffé. Man vergleiche den im vorigen Heft dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz, auf den mit loc. cit. verwiesen wird.

2) Insbesondere bin ich Herrn Dr.-Ing. Schneider für seine liebenswürdigen Aufklärungen und Führungen an Ort und Stelle zu großem Dank verpflichtet.

die reine Radiumemanation zurückzuführen sind, sondern von der Eigenart der Quelle, ihrem Salz- und Gasgehalt abhängen.

Bei den Messungen mit dem Wulfelektrometer und der vollständig geschlossenen Kanne sind die Beobachtungsfehler nur gering, alle Beobachtungen einer und derselben Quelle liefern übereinstimmende Werte für die Anklingkurve. Für die Wettin-, Wiesen- und Eisen-Quelle zu Bad Brambach sind die Anstiegkurven in der folgenden Kurventafel (s. Fig.) zusammen mit der Duaneschen (D) angegeben. Die Ordinaten geben die Werte $\frac{I_0}{I_t}$ an (loc. cit. S. 200). Die Kurven gelten für 1 Liter Eisenquelle (E), 1 Liter Wiesenquelle (W) und 50 cm³ Wettinquelle gemischt

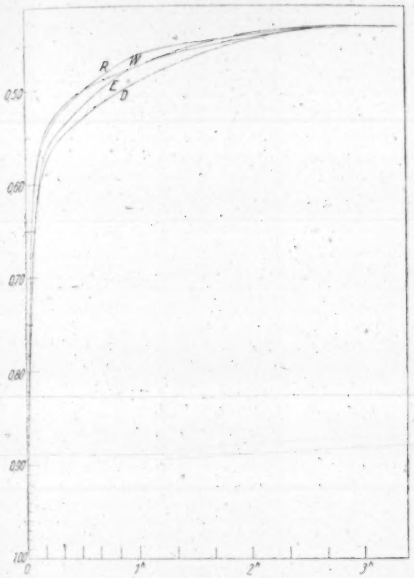
Tabelle I.

Quelle	50 cm³ Wettinquelle			50 cm³ Wettinquelle		
Zusatz	950 cm³ Bachwasser			950 cm³ Bachwasser		
Zeit	Volt sec⁻¹	$I_0 K$	I_0 Duane	Zeit	Volt sec⁻¹	$I_0 K$
4'59"	1,975	1,17	1,29	3'34"	1,86	1,15
5'45"	2,040	1,18	1,29	5'45"	1,96	1,15
8'50"	2,050	1,16	1,28	8' 5"	2,03	1,15
10'11"	2,085	1,16	1,22	10'10"	2,10	1,16
11'53"	2,100	1,15	1,21	12'21"	2,14	1,16
13'30"	2,155	1,16	1,22	14'45"	2,14	1,15
15'31"	2,161	1,15	1,21	16'40"	2,17	1,15
16'59"	2,200	1,16	1,22	19'14"	2,20	1,15
18'45"	2,220	1,16	1,22	21'10"	2,22	1,15
20'25"	2,230	1,16	1,22	23'20"	2,22	1,13
21'55"	2,245	1,16	1,23	25'45"	2,24	1,14
23'38"	2,261	1,16	1,23	28' 4"	2,25	1,14
25'15"	2,285	1,17	1,23	30'22"	2,28	1,15
27'10"	2,297	1,17	1,24	34'54"	2,29	1,14
28'33"	2,320	1,17	1,24	37'12"	2,31	1,13
30'18"	2,320	1,17	1,24	40'14"	2,31	1,13
31'57"	2,335	1,17	1,24	42'29"	2,34	1,13
33'33"	2,352	1,17	1,24	48 23"	2,38	1,13
35' 8"	2,361	1,17	1,24	53 28"	2,41	1,13
37'12"	2,385	1,17	1,24	58' 6"	2,45	1,14
39' 5"	2,422	1,18	1,25	1 h —	2,45	1,13
40'56"	2,425	1,18	1,25	1 h 10'	2,47	1,13
50 —	2,500	1,18	1,25	1 h 15'	2,51	1,14
1 h —	2,500	1,18	1,25	1 h 24'	2,52	1,14
2 h 25'5'	2,720	1,18	1,18	1 h 40'	2,54	1,13
3 h —	2,750	1,18	1,18	2 h —	2,58	1,13
5 h —	2,750	1,18	1,18	2 h 20'	2,60	1,13
				2 h 40'	2,61	1,13
				3 h —	2,61	1,13
Richtiger Nullwert		1,18	1,18			1,13
Mittelwert		1,17	1,23			1,14
Mittlerer Fehler		+ 0,8 Proz.	+ 2,2 Proz.			+ 0,9 Proz.

Tabelle II.

Versuchsverfahren: Zwei-Minuten-Messung. Der aktive Beschlag müßte etwa 26 Proz. vom Gesamtstrom ausmachen.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge: Quelle	Wassermenge: Zusatz	Gesamtstrom	aktiver Beschlag	bei der Wiesenquelle
1.	Wiesenquelle	Engler u. Sieveking	250 cm³	—	100 Proz.	20,7 Proz.	—
2.	„	„ „ „	250 cm³	—	100 „	20,2 „	—
3.	„	„ „ „	500 cm³	—	100 „	17,8 „	—
4.	„	„ „	1000 cm³	—	100 „	13,7 „	—
5.	„	„ „	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 „	11,4 „	—
6.	„	„ „	500 cm³	500 cm³ kohlensäurereiches Wasser	100 „	15,3 „	—
7.	Eisenquelle	„ „	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 „	12,0 „	11,4 Proz.
8.	Wettinquelle	„ „	50 cm³	975 cm³ „	100 „	11,0 „	11,4 „
9.	„	H. W. Schmidt	25 cm³	475 cm³ „	100 „	22,5 „	11,4 „



mit 950 cm³ ausgeschütteltem Bachwasser (R), beobachtet mit dem Wulfelektrometer und der 15-Liter-Kanne. Anderer Wasserzusatz, Beimengungen von Salzen oder Gasen beeinflussen den radioaktiven Verlauf des Anstiegs. In der vorstehenden Tabelle I sind zwei unter gleichen Bedingungen angestellte Beobachtungen der Wettinquelle angegeben. Die Nullwerte wurden nach der Kurve R (Fig. 1) berechnet, sie zeigen gute Übereinstimmung, die nach Duane berechneten dagegen systematische Abweichungen.

Diese besonderen Anstiegkurven sind von Bedeutung, wenn die Aktivität einer Quelle ständig geprüft werden soll. Man braucht dann den radioaktiven Anstieg nur kurze Zeit zu beobachten und kann hieraus den Nullwert mit guter Genauigkeit bestimmen (1 Proz., Tabelle I).

Die Kurven zeigen, daß der Ionisationsstrom fast durchgängig größer ist, als er der reinen Emanation und ihren Zerfallsstoffen zukommt, und zwar zu gleichen Zeiten für jede Quelle um einen verschiedenen Betrag. Dies fand eine Bestätigung in den mehrjährigen Beobachtungen des Herrn Bergrats Bachmann in Zwickau, der die Brambacher Quellen seit April 1912 alle 8 oder 14 Tage einer Kontrolle nach der „Zweiminuten-Messung" unterzieht. Er hat gefunden, daß der Betrag des aktiven Niederschlags bei jeder Quelle einen anderen Prozentsatz vom Gesamtstrom ausmacht und führt dies auf den verschiedenen Kohlensäuregehalt und auf den Grad der Verdünnung des zu untersuchenden Wassers zurück.

Um Anschluß an die sonst gebräuchlichen Methoden zu schaffen, wurden noch Versuche mit der Zwei- und Zehn-Minuten-Messung angestellt.

In den drei Tabellen II, III, IV ist eine größere Reihe solcher Versuche angegeben. Es sind alle wichtigeren Daten eingetragen, wie der Name der Quelle und der Apparat, in welchem beobachtet wurde, die Menge des Quellwassers und der Verdünnung. Der jeweilig beobachtete Gesamtstrom ist in allen Tabellen mit 100 Proz. eingetragen, der danach gemessene aktive Beschlag ist in Prozenten des vorher gemessenen Gesamtstromes angegeben, selbstverständlich beide Male nach Abzug der Normalzerstreuung. Bei einem Teil der Versuche ist in der letzten Spalte noch der Prozentsatz des Niederschlags angegeben, der bei dem in gleicher Weise angestellten Versuche mit der Wiesenquelle beobachtet wurde. Es muß noch vorausgeschickt werden, daß die Wiesenquelle sehr kohlensäurearm ist, ihre Aktivität beträgt etwa 150 Mache-Einheiten. Die Eisenquelle ist ungefähr gleich aktiv, aber kohlensäurereich. Die Wettinquelle ist so hoch aktiv, daß ihre Stärke nur in größter Verdünnung gemessen werden kann.

Zu den Versuchen ist im einzelnen folgendes zu bemerken:

1. Die beiden ersten Versuche zeigen, daß bei derselben Quelle im gleichen Apparat, unter gleichen Bedingungen und nach demselben Versuchsverfahren der gleiche Anteil vom Gesamtstrom später als aktiver Beschlag gemessen wird. Dasselbe geht für sich aus den Versuchspaaren 14 und 15, 18 und 19, 20 und 23 hervor.

2. Ergänzend hierzu beweisen die Versuche 10, 11 und 12, daß sich unter gleichen Verhältnissen in ungefähr gleich großen Apparaten derselbe Betrag von Zerfallsstoffen an den Wänden niederschlägt.

3. Dagegen zeigen die Versuche 8 und 9, desgleichen vollständiger die Versuche 23, 24 und 25, daß auch bei sonst gleichen Bedingungen in großen Kondensatoren bedeutend weniger aktiver Niederschlag gemessen werden kann als in kleinen Apparaten.

4. Betrachtet man die ersten 4 Versuche zusammen, so sieht man, daß sich bei einer kleinen ausgeschüttelten Wassermenge mehr Zerfallstoffe niederschlagen und daß sich mit

Tabelle III.

Versuchsverfahren: Zehn-Minuten-Messung. Der aktive Beschlag müßte etwa 43 Proz. vom Gesamtstrom ausmachen.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge Quelle	Wassermenge Zusatz	Gesamtstrom	aktiver Beschlag	bei der Wiesenquelle
10.	Wiesenquelle	Mache u. Meyer	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 Proz.	10,3 Proz.	—
11.	„	Wulf	500 cm³	500 cm³ „	100 „	10,2 „	—
12.	„	Engler u. Sieveking	500 cm³	500 cm³ „	100 „	10,2 „	—
13.	Eisenquelle	„ „ „	500 cm³	500 cm³ „	100 „	12,9 „	10,2 Proz.
14.	Wiesenquelle	„ „	1000 cm³	—	100 „	14,2 „	—
15.	„	„ „	1000 cm³	—	100 „	14,3 „	—
16.	Eisenquelle	„ „	1000 cm³	—	100 „	16,0 „	14,2 „
17.	Wiesenquelle	H. W. Schmidt	500 cm³	—	100 „	17,2 „	14,2 „
18.	Eisenquelle	Engler u. Sieveking	250 cm³	—	100 „	13,3 „	—
19.	„	„ „	250 cm³	—	100 „	13,3 „	—
20.	Wettinquelle	„ „	50 cm³	950 cm³ Bachwasser	100 „	9,6 „	10,2 „
21.	„	Wulf	50 cm³	950 cm³ „	100 „	9,3 „	10,2 „
22.	„	Mache u. Meyer	25 cm³	975 cm³ „	100 „	9,5 „	10,2 „
23.	„	Engler u. Sieveking	50 cm³	950 cm³ „	100 „	9,6 „	10,2 „
24.	„	Kohlrausch u. Loewenthal	25 cm³	975 cm³ „	100 „	17,1 „	—
25.	„	H. W. Schmidt	25 cm³	475 cm³ „	100 „	40,0 „	—
26.	Eisenquelle	Engler u. Sieveking	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 Proz.	7,9 Proz.	10,2 Proz.
27.	„	Wulf	500 cm³	500 cm³ „	100 „	8,0 „	10,2 „

Tabelle IV.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge Quelle	Wassermenge Zusatz	Zeit der Messung des Gesamtstromes	Gesamtstrom	aktiver Beschlag
28.	Wettinquelle	Engler u. Sieveking	50 cm³	50 cm³ Bachwasser	2 Min.	100 Proz.	13,0 Proz.
29.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	12 Min.	100 „	9,6 „
30.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	1 h	100 „	13,9 „
31.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	3 h	100 „	15,7 „

wachsender Wassermenge immer weniger absetzen[1]).

5. Bei den Beobachtungen 4 und 5 ist zwar die Wassermenge gleich, aktives Wasser ist aber bei 5 nur die Hälfte, die Menge des Niederschlags ist geringer. Dies wird bestätigt durch die Versuche 12 und 14[2]).

6. Es ist auffallend, daß durch Zusatz von kohlensäurereichem Wasser die Menge des aktiven Beschlags stark wächst, wie es der Versuch 6 gegen 5 zeigt. Dasselbe Bild gibt Versuch 7 bei der kohlensäurereichen Eisenquelle, wenn auch hier nur in geringem Maße. Deutlicher tritt die Wirkung der Kohlensäure bei dem Versuch 16 gegen 14 und 15 hervor, desgleichen 13 gegen 12[3]).

7. Die Versuche 16, 18, 19 sind nicht ganz zuverlässig. Im Engler und Sievekingschen Apparat muß der Überdruck durch Wasserablassen ausgeglichen werden, bei der Eisenquelle läuft nicht nur das ganze Wasser ab, es verpufft auch noch Gas.

8. Bei Vergleich der Tabellen II und III untereinander muß noch festgestellt werden, daß sich in Beziehung zum Gesamtstrom gebracht nach etwa 2 Minuten schon ebensoviel und mehr aktive Bestandteile niedergeschlagen haben wie nach etwa 10 Minuten. Man betrachte Versuch 4 und 14; 5 und 10, 11, 12; 7 und 13; 8 und 20, 21, 22, 23[1]).

9. Die Versuche 26 und 27 stehen abseits; der Apparat war nicht geerdet, das Elektroskop wurde nur zu den wenigen Ablesungen mit Hartgummi aufgeladen; es bestand also nur sehr kurze Zeit ein elektrisches Feld.

10. Nach den Beobachtungen 28, 29, 30 und 31 ist es fast ohne Einfluß, zu welcher Zeit der Gesamtstrom gemessen wird, die Menge des aktiven Beschlags im Verhältnis zum Gesamtstrom ändert sich nur wenig. Zwei Minuten nach dem Schütteln hat sich im Vergleich zum

1) Bei kleinen Wassermengen ist die Schüttelwirkung größer, es haben sich radioaktive Zerfallstoffe aus dem Wasser mit niedergesetzt.

2) Die Konzentration der Lösung ist schwächer, bei gleicher Wassermenge werden weniger aktive Stoffe ausgeschüttelt.

3) Dieselbe Wirkung folgt nach Zusatz von salzhaltigem Wasser.

1) Vermutlich infolge ausgeschütteter Zerfallsstoffe.

Gesamtstrom mehr abgesetzt als nach 12 Minuten, nach 1^h und 3^h ist der aktive Beschlag wieder etwas gewachsen. Dies ist eine Bestätigung dafür, daß aktive Bestandteile mit ausgeschüttelt werden.

Aus den Versuchen im ganzen läßt sich ersehen, daß alle Verfahren der Beobachtung des aktiven Beschlages überhaupt unanwendbar sind; sie liefern nicht nur ein falsches Ergebnis, sie sind auch nicht zu vergleichenden Messungen zu gebrauchen. Einen sehr starken Einfluß auf die getrennt beobachtbare Menge des aktiven Niederschlags üben die Größe des Apparates, die Menge des geschüttelten Wassers, die Konzentration der Lösung und der Gas- und Salzgehalt einer Quelle aus.

Nachwort des Herausgebers. Am Schluß des Nürnbergerschen Manuskriptes waren Angaben der Aktivitätszahlen einer größeren Anzahl von Quellen, Untersuchungen auf Thoraktivität und Nachforschungen nach in Quellwasser gelösten aktiven Salzen angekündigt. Auf Grund der vorliegenden Beobachtungsprotokolle lassen sich wenigstens die Aktivitätszahlen der drei im Text behandelten Quellen berechnen.

Nürnberger hatte besondere Versuche über den Grad der erreichten Sättigung angestellt. Zu diesem Zwecke wurden die inneren Elektroden der Apparate mit Schutzring versehen und mit einer Piezoquarz-Anordnung verbunden, während die Kanne selbst auf wechselndes Potential (bis zu 2000 Volt) geladen wurde. Die Versuche waren nicht völlig abgeschlossen, es hat sich aber ergeben, daß in keinem der benutzten Apparate bei den zur Messung dienenden Spannungen völlige Sättigung erreicht ist. Im Schmidtschen Apparat fehlen etwa 5 Proz., in den großen Apparaten mindestens 9 Proz. an völliger Sättigung. (Bei Bestrahlung mit γ-Strahlen war die Sättigung, wie zu erwarten, wesentlich besser.)

Legt man diese Zahlen zugrunde, ferner die nach Duane und Laborde[1]) berechneten Faktoren für die unvollständige Ausnutzung der α-Strahlen, so gelangt man zu den in Tabelle V zusammengestellten Angaben. Es sind nur Messungen aufgenommen, bei denen die vollständige Anstiegkurve beobachtet worden ist.

Es muß bemerkt werden, daß die Versuche bei einem durchschnittlichen Barometerstand von 700 mm ausgeführt sind. Sieht man die von Frau Curie[2]) ermittelte Korrektionsformel für diesen Druckbereich noch als gültig an, so sind also die Zahlen mindestens um weitere 4 Proz. zu erhöhen. Aus den Aufzeichnungen von Nürnberger ist kein Grund dafür ersichtlich, warum die Messungen im gleichen Apparat an verschiedenen Tagen so erheblich variieren, wie die beiden vom 10. und 27. Juli. Für den Schmidtschen Apparat dürfte die Berechnung des Duaneschen Faktors aus Oberfläche und Volum unzulässig sein, namentlich für den niedrigen Druck.

Tabelle V.

Datum	Quelle	Apparat	Aktivität in Mache-Einheiten
8. Mai 1914	Wettinquelle	Wulf	1710
8. „ 1914	„	H. W. Schmidt	1550
8. Juli 1914	„	Mache u. Meyer	1915
10. „ 1914	„	Wulf	1915
27. „ 1914	„	„	1685
28. April 1914	Eisenquelle	„	150
30. „ 1914	Wiesenquelle	„	154
23. Juli 1914	„	„	145

Nach den Angaben von Weidig[1]) beträgt die Aktivität der Wettinquelle („Neue Quelle") im Mittel 1942 M.-E., diejenige der Eisenquelle 167,2 und die der Wiesenquelle 176,3 M.-E. Diese Angaben sind nur 10—17 Proz. höher als die obigen; es ist aber zu beachten, daß Weidig weder eine Korrektur für die unvollständige Ausnützung der Strahlen, noch für die mangelhafte Sättigung angebracht hat; demnach ist — in Übereinstimmung mit den Angaben Nürnbergers — bei dem von Weidig benutzten Meßverfahren nach Engler und Sieveking der aktive Niederschlag viel zu niedrig in Rechnung gesetzt, so daß sich die Fehler größtenteils kompensieren.

Zusammenfassung.

Die Anstiegkurve natürlicher Mineralwässer zeigt systematische, für jede Quelle charakteristische, wahrscheinlich durch den Salz- und Gasgehalt bedingte Abweichungen von derjenigen reiner Emanationslösungen.

Die getrennte Bestimmung des aktiven Niederschlags führt zu fehlerhaften, stark von den Versuchsbedingungen abhängigen Ergebnissen.

In keinem der benutzten Apparate ist bei den für die Messung verwendeten Potentialen vollständige Sättigung erreicht.

1) W. Duane u. A. Laborde, Le Radium 7, 163. 1910.

2) M. Curie, Die Radioaktivität. Leipzig 1912. Band 1, S. 282.

1) M. Weidig, Radioaktive Wässer in Sachsen. IV. Teil. Freiberg i. S. 1912.

Leipzig, im Oktober 1919.

(Eingegangen 15. November 1919.)

Über die Bildverzerrung bei der Abbildung eingetauchter Körper.

Von W. Kramer.

Gemäß einer Bemerkung in der „Geometrie der Lage“ von Reye[1] erscheinen „einem Fische alle über Wasser befindlichen Gegenstände affin verwandelt, z. B. eine Kugel als Ellipsoid, ein Würfel als schiefes Parallelepipedon“. Bekanntlich trifft diese Behauptung im allgemeinen nicht zu, sondern ist nur unter gewissen sehr weitgehenden Einschränkungen angenähert richtig. Um dies möglichst augenfällig zu zeigen, photographierte Verfasser in Wasser eingetauchte Gegenstände und von unter Wasser in Luft befindliche Gegenstände. Zwei von diesen Aufnahmen scheinen allgemeineres Interesse zu haben und seien deshalb vorgelegt.

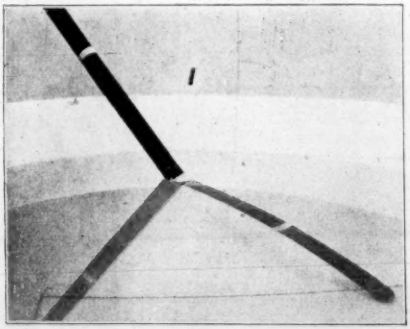


Bild 1.

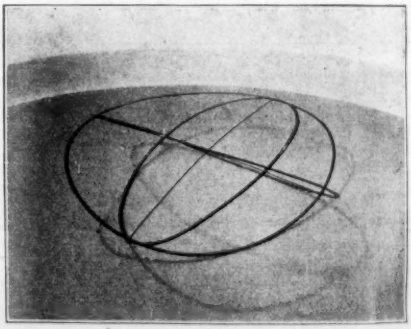


Bild 2.

Die erste Photographie (Bild 1) zeigt einen schräg in Wasser eingetauchten Stab mit Marken in gleichen Abständen, der parallel zur Bildebene aufgestellt ist. Diese Stellung scheint gegenüber der üblichen Darstellung dieser Bildverzerrung in den Lehrbüchern, wobei der Stab mit dem Auge in der Zeichnungsebene angenommen wird, den Vorzug zu verdienen; denn bei jenen Abbildungen kann das Auge wohl eine Verkürzung des Stabes beobachten, die Verzerrung selbst aber, vor allem den „Knick“, auf den in der Regel hingewiesen wird, gar nicht wahrnehmen.

Wird schon an dieser Aufnahme deutlich, daß von affiner Verwandlung nicht die Rede ist, so ist die zweite Photographie (Bild 2) in dieser Hinsicht noch lehrreicher, insofern sie zeigt, daß die Verzerrungen so stark werden können, daß eine Kreislinie im Bilde einen Doppelpunkt erhält. Das Objekt war in diesem Falle ein System dreier zueinander senkrechter Kreise mit eingespannten gemeinsamen Durchmessern[1]). Die beste Einstellung zur Erzielung dieser Aufnahme des fraglichen Kreises ergibt sich aus folgender Rechnung.

Vom Punkte P im Medium I gelange ein Lichtstrahl über den Punkt B in der Grenzebene ins Auge A im Medium II (vgl. Figur). Wir vergleichen damit einen Lichtstrahl, der von einem Peripheriepunkte P_1 eines kleinen zu BP senkrechten Kreises vom Radius ε über B_1 in der Grenzebene nach A gelangt. Der Radius PP_1 sei um den Winkel u gegen die positive y-Achse des Achsensystems, auf welches wir das System gemäß der Figur beziehen, gedreht. Die Einfalls- bzw. Brechungswinkel seien α, α_1, β, β_1, es sei der Brechungsexponent n.

$$AB = a,\ AB_1 = a_1,\ BP = r,\ B_1P_1 = r_1,$$
$$BOB_1 = \varphi,$$

der Koordinatenanfangspunkt liege in O. Die Koordinaten von P und P_1 sind dann

$$x = a\sin\alpha + r\sin\beta,\quad y = 0,\quad z = r\cos\beta,$$
$$x_1 = \cos\varphi\,(a_1\sin\alpha_1 + r_1\sin\beta_1),$$
$$y_1 = \sin\varphi\,(a_1\sin\alpha_1 + r_1\sin\beta_1),\quad z_1 = r_1\cos\beta_1,$$

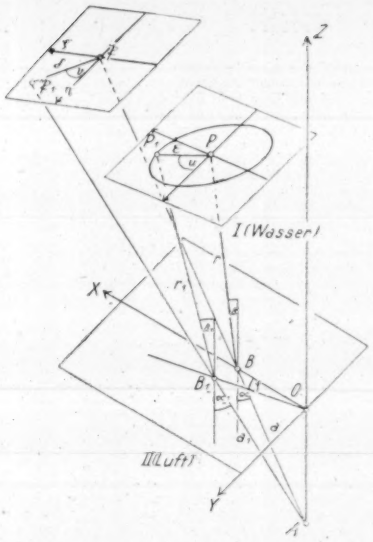
und es bestehen die Beziehungen

$$x_1 = x + \varepsilon\sin u\cos\beta,\ y_1 = \varepsilon\cos u,\ z_1 = z - \varepsilon\sin u\sin\beta,$$
$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,\quad a_1\cos\alpha_1 = a\cos\alpha.$$

Nimmt man ε als kleine Größe an, deren Potenzen vernachlässigt werden können, so

1) Vgl. Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, vierte Aufgabe des Anhangs.

1) Es wurde dem Verf. freundlichst von Herrn Prof. Scheffers zur Verfügung gestellt.



wird auch φ entsprechend klein. Setzt man $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ usw. und entwickelt in den angegebenen Gleichungen bis zu Gliedern, die von der der ersten Ordnung klein sind, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cos u}{a \sin\alpha + r \sin\beta}, \qquad \Delta\alpha = \frac{\varepsilon \sin u}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r\cos\alpha}{n\cos\beta}}.$$

Senkrecht zum Lichtstrahl AB legen wir im Punkte $\mathfrak{P}$ eine Bildtafel und führen in dieser ein rechtwinkliges Achsensystem in η, ζ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}$ ein, dessen η-Achse parallel zur y-Achse gerichtet ist. Dem Punkte P_1 entspricht der Bildpunkt $\mathfrak{P}_1$ mit dem Radiusvektor δ und dem Polarwinkel v. Bestimmen wir rückwärts aus δ und v die Werte von φ und $\Delta\alpha$, so handelt es sich um genau die gleiche Rechnung wie oben nur für den Sonderfall $n = 1$. Wird $A\mathfrak{P}$ noch gleich $\mathfrak{a}$ gesetzt, so ist demnach

$$\varphi = \frac{\delta \cos v}{\mathfrak{a} \sin\alpha}, \qquad \Delta\alpha = \frac{\delta \sin v}{\mathfrak{a}}.$$

Durch Vergleich der beiden Werte für φ und $\Delta\alpha$ folgt

$$\delta \cos v = \varepsilon \cos u \frac{\mathfrak{a}}{a + \dfrac{r}{n}},$$

$$\delta \sin v = \varepsilon \sin u \frac{\mathfrak{a}}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r\cos\alpha}{n\cos\beta}},$$

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u \frac{a + \dfrac{r}{n}}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r\cos\alpha}{n\cos\beta}}.$$

Parallele Linienelemente ε in verschiedenen Punkten P, P', P'' usw. von BP haben demnach im allgemeinen verschiedene Bilder. Nur für u, u', u'' gleich 0^0, 90^0, 180^0 usw., werden auch die zugehörigen Werte v, v', v'' einander gleich und ebenso groß wie die bezüglichen Werte der u. Für sehr nahe an der Grenzfläche gelegene Linienelemente (r nahe 0) wird

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \operatorname{tg} u,$$

für weit entfernte Linienelemente (r nahe ∞)

$$\operatorname{tg} v_\infty = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \operatorname{tg} u.$$

In dem besonders einfachen Fall $u = 45^0$ ist demnach

$$v_0 + v_\infty = 90^0.$$

Wir wenden diese Ergebnisse auf die Abbildung eines beliebig großen Kreises an, für den der Lichtstrahl BP mit einem Durchmesser zusammenfällt. Die Bilder der an den Endpunkten dieses Durchmessers gelegenen Bogenelemente werden durch unsere Berechnung bestimmt. Abgesehen von den Sonderfällen, daß der Kreis in der Einfallsebene liegt oder senkrecht dazu steht, schneiden sich diese Bilder. Da das Bild des Kreises aber eine geschlossene Kurve werden muß, so ergibt sich sein Bild in der Form einer liegenden 8, wie das Photogramm es erkennen läßt.

Bemerkt sei noch, daß das Bild des oben betrachteten kleinen Kreises vom Radius ε eine Ellipse wird. In der Tat ist die Gleichung der Bildkurve, wie leicht zu übersehen,

$$\frac{\eta^2}{(\varepsilon\mathfrak{B})^2} + \frac{\zeta^2}{(\varepsilon\mathfrak{C})^2} = 1,$$

worin $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Abkürzungen für die Koeffizienten von $\varepsilon \cos u$ und $\varepsilon \sin u$ in den obigen Formeln sind. Sonach trifft auf diese Abbildung die Reyesche Bemerkung zu. Allerdings ist hier auch die notwendige Voraussetzung für die Affinität, die Beschränkung auf dünne Strahlenbüschel und einen schmalen Abbildungsraum erfüllt.

(Eingegangen 31. Dezember 1919.)

BESPRECHUNGEN.

V. Kohlschütter, Nebel, Rauch und Staub. Vortrag, gehalten auf der Naturf. Ges. zu Bern. Bern, Max Drechsel 1918. 36 S.

Der vorliegende Vortrag zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten werden die charakteristischen Eigenschaften von Nebel, Rauch und Staub als disperse Systeme und ihre Teilchengröße geschildert; darauf werden die wichtigsten sie beherrschenden Gesetze, z. B. das Stokessche Gesetz, ferner ihre Ionisierung und das Wachsen der Teilchen infolge verschiedener Oberflächenspannung besprochen. Im zweiten Abschnitt werden die Formen behandelt, welche diese Gebilde im großen annehmen und die Bedeutung geschildert, welche ihnen bei speziellen technischen Prozessen, z. B. bei der Erzeugung des Steinkohlengases, bei der Rußbildung usw. zukommt. Im dritten geht der Verf. ein auf die behördlichen Maßregeln, welche gegen die Rauchplage angeordnet, und auf die verschiedenen Verfahren, welche zu ihrer Beseitigung getroffen worden sind. Der Vortrag ist leicht verständlich und gibt eine gute Übersicht dieses wichtigen Gegenstands. Gerhard Schmidt.

Dr. Richard Hennig, Unser Wetter. Eine Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 349). 8°. 118 S. m. 48 Abbildungen. 6.—10. Tausend. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.50.

Der Inhalt dieses kleinen Werkchens geht nicht darauf aus zu einer Wetterprognose anzuleiten oder Regeln für die Beobachtung der Wetterlage den Lesern nahezulegen, sondern bringt die Schilderung einer großen Anzahl von typischen Witterungszuständen, wie sie unter bestimmten gegebenen Verhältnissen in den einzelnen Jahreszeiten einzutreten pflegen. Diese Betrachtungen werden sehr wirkungsvoll unterstützt und veranschaulicht durch kleine Kärtchen, welche den jeweiligen Zustand der Atmosphäre durch Isobaren und Temperaturangaben darstellen. Diese Art der Schilderung der verschiedenen Umstände, die im allgemeinen und für eine bestimmte Gegend gewisse Wetterlagen zustande kommen läßt, ist ganz besonders geeignet die Aufmerksamkeit der Laien zu schärfen und in eine auch die Voraussagungen der Wetterdienststellen entsprechend beurteilende Richtung zu lenken.

L. Ambronn.

Tagesereignisse.

Die deutsche Zentralstelle für Erdbebenforschung, die sich früher in Straßburg i. Els. befand, hat seit Mai vorigen Jahres ihren Sitz nach Jena (Sternwarte) verlegt. Wie bisher, so hofft sie auch jetzt wieder auf rege Unterstützung von seiten weitester Bevölkerungskreise durch Sammeln und Zusendung von Erdbebennachrichten. Erwünscht ist zunächst die Beobachtung jedes Erdbebens, auch der schwächsten Erschütterung, nach Ort, Zeit und sämtlichen irgendwie wahrnehmbaren Wirkungen. Auch diesbezügliche Ausschnitte aus den Lokalblättern sind von Wert. Da ferner die Chronik aller in Deutschland aufgetretenen Erdbeben für die Zeit bis einschließlich des verflossenen Jahrhunderts noch manche Lücken aufweist, so wendet sich die Zentralstelle an alle diejenigen, die Gelegenheit haben alte Chroniken, Kirchenbücher, Zeitschriften und sonstige Werke einzusehen, mit der Bitte, etwa aufgefundene Notizen über stattgehabte Erdbeben abschriftlich mit Quellenangabe hierher mitzuteilen. Durch diese meist kleine Mühe können noch manche verborgenen Tatsachen ans Tageslicht gebracht werden, da erfahrungsgemäß gerade Ortschroniken und Kirchenbücher in dieser Hinsicht wichtige, aber nur wenigen zugängliche Fundgruben bilden. Für jede, auch die bescheidenste Mitteilung darf der Einsender auf den Dank der Zentralstelle rechnen. Wenn sie auf den ersten Blick auch noch so unbedeutend erscheinen mag, so kann sie doch das wichtige fehlende Glied einer Kette sein. Unter Umständen ist es schon von Bedeutung zu erfahren, daß in diesem oder jenem Ort überhaupt schon einmal ein Erdbeben verspürt worden ist. Ganz besonders wertvoll sind Erdbebennachrichten aus Nord-, Mittel-, Ost- und Südost-Deutschland, weil diese Gegenden nur recht selten von Erderschütterungen betroffen zu werden pflegen und deshalb, zum Teil mit Unrecht, als erdbebenlos angesehen werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Dr. Erich Regener in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Berufen: Der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Max Born zum ord. Professor der Experimentalphysik an die Universität Göttingen.

Auszeichnungen: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich Dr. Peter Debye und der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Geheimer Hofrat Dr. Arnold Sommerfeld wurden zu korrespondierenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften ernannt. Die Königl. Dänische Gesellschaft der Wissenschaft wählte zu auswärtigen Mitgliedern in ihrer naturwissenschaftlich-mathematischen Klasse den Professor für theoretische Physik am Kaiser-Wilhelm-Institut in Berlin Dr. Albert Einstein, den ord. Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Max Planck, den ord. Professor für Experimentalphysik an der Universität Erlangen Geh. Hofrat Dr. Eilhard Wiedemann und den ord. Professor für allgemeine und Experimentalchemie an der Universität München Dr. Richard Willstätter.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Graz Dr. Viktor v. Dantscher, der ord. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule München Geheimer Hofrat Dr. August Foeppl (mit Abschluß des Sommersemesters).

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg Geheimer Hofrat Dr. Moritz Cantor, der Professor für Physik am Gymnasium Wolfenbüttel Geh. Hofrat Dr. Julius Elster.

Gesuche.

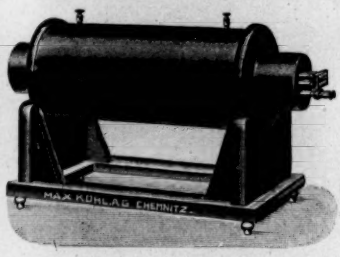
Promovierter Physiker

mit Erfahrungen über elektrische Schwingungen, speziell Glühkathodenröhren, sucht Anstellung in technischem Betriebe. Angebote unter **S. H. 565** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



62582. Funkeninduktor mit Sekundärwicklung von geringem Widerstand, für Wehnelt-Unterbrecher, 400 mm Funkenlänge.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

PHYWE

Physikalische Werkstätten, G.m.b.H.

Göttingen 1 bauen als Sondererzeugnis

Sämtliche Apparate zur Einführung in das Gebiet der elektrischen Schwingungen sowie Demonstrations- und Spiegelgalvanometer

in einfachen, besonders preiswürdigen Ausführungsformen.

Man verlange Preisblätter.

Prismen, Linsen, Platten
aus
Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.
Gyps- und Glimmerpräparate.

Preisliste gratis.

R. Halle Nachfolger, Optisches Institut.
Berlin-Steglitz.

Въ современныхъ, новыхъ государства потребуются въ такихъ современныхъ, но общеизвѣстныхъ приборахъ какъ

Барреттеръ измерительный приборъ Гати для высокихъ напреженіе и для телефона.

Цѣна Руб. 250 —

Béla Gáti,
Budapest IX, Gyáli-ut. 22.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

Seite

Brennfleckstrahlung: Untersuchungen über sichtbare blaugraue — an der Lilienfeldröhre, v. J. E. Lilienfeld u. F. Rother 249

Budde, E., Bemerkung zu einer Abhandlung des Herrn Waetzmann 274

Crommelin, C. A., Der „supraleitende Zustand" von Metallen. (Z. B.) 274

Ergodenhypothese: Ausschaltung der — in der physikalischen Statistik. II. Von R. v. Mises . . . 256

Greinacher, H., Zur Messung der Radiumemanation in Quellwässern 270

Hahnemann, W., u. **H. Hecht**, Schallgeber und Schallempfänger. III. 264

Hecht, H., u. **W. Hahnemann**, Schallgeber und Schallempfänger. III. 264

Jaeckel, G., Die physiologische Erklärung des „Tellermondes" 262

Lilienfeld, J. E., u. **F. Rother**, Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre 249

Lilienfeldröhre: Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der —, v. J. E. Lilienfeld u. F. Rother 249

Metalle: Der „supraleitende Zustand" von —, v. C. A. Crommelin. (Z.-B.) 274

v. Mises, R., Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. II. 256

Quellwässer: Zur Messung der Radiumemanation in —, v. H. Greinacher 270

Radiumemanation: Zur Messung der — in Quellwässern, v. H. Greinacher 270

Rayleighsches Gesetz: Ein Versuch zur Demonstration des Rayleighschen Gesetzes, v. F. Rother . . . 272

Rother, F., Ein Versuch zur Demonstration des Rayleighschen Gesetzes 272

Rother, F., u. **J. E. Lilienfeld**, Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre 249

Schallempfänger und Schallgeber. III., von W. Hahnemann u. H. Hecht 264

Schallgeber und Schallempfänger. III., von W. Hahnemann u. H. Hecht 264

Tellermond: Die physiologische Erklärung des —, v. G. Jaeckel 262

Vater, H., Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahren Fehler bei der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Berichtigung 280

Waetzmann: Bemerkung zu einer Abhandlung des Herrn —, v. E. Budde 274

Richard Müller-Url, Braunschweig Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe. — Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat. — Apparate für flüssige Luft. — Verflüssigte Gase in Röhren. — Projektions- und Extrem-Thermometer. — Elektroskope** und **Trockensäulen. — Vakuumröhren** nach Braun, Crookes Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme. — Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Prinzipien der Atomdynamik von **Dr. J. Stark**

In drei Teilen.

I. Die elektrischen Quanten. Preis geheftet M. 6.40, gebunden M. 11.—

II. Die elementare Strahlung. Preis geheftet M. 15.60, gebunden M. 21.—

III. Die Elektrizität im chemischen Atom. Preis geheftet M. 16.—, gebunden M. 22.—

ausschließlich Teuerungszuschlag.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.